ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

2025/26 учебный год, ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. 10 классы.

ЗАДАНИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

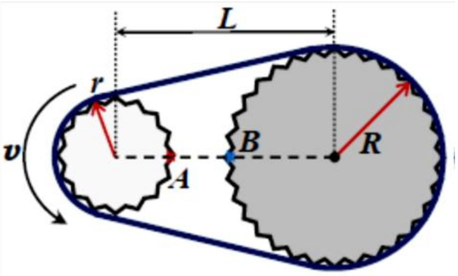
Часть I (проверялись только ответы).
Пример варианта (численные данные варьировались):

Вопрос 1 (9 баллов):
Постоянное количество идеального газа участвует в циклическом процессе 1-2-3-1. В координатах давление-объем вершины цикла – это точки 1 (V_0,32p_0), 2 (16V_0,2p_0) и 3 (8V_0,p_0). Известно, что во всех трех составляющих этот цикл процессах теплоемкость газа постоянна, причем в одном из них она равна нулю. В процессе 2-3 над газом произведена работа, равная 360 Дж. Найдите работу над газом в адиабатическом процессе. Ответ запишите в Дж, с точностью до целого значения.

ОТВЕТ: 1080.

КОММЕНТАРИЙ: Все процессы – политропические ($pV^n = const$), причем один из них – адиабата. По данным точкам определим показатели политроп: процесс 1-2 – это изотерма, так как в нем $pV = const$; процесс 2-3 отвечает $n = -1$, в процессе 3-1 при уменьшении объема в 8 раз давление увеличилось в 32 раза, что отвечает $n = \frac{5}{3}$, и это – показатель адиабаты одноатомного идеального газа, так что именно этот процесс - адиабатический. В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, то есть работа <u>над газом</u> в адиабатическом процессе $A'_{31} = \Delta U_{31} = -\Delta U_{23}$. В процессе 23, в котором давление одноатомного идеального газа изменяется пропорционально объему, $\Delta U_{23} = -3A'_{23}$. Значит, $A'_{31} = 3A'_{23} = 1080$ Дж.

Вопрос 2 (8 баллов):
Две шестеренки – ведущая, радиусом r = 10 см, и ведомая, радиусом R = 14 см, вращаются, соединенные нерастяжимой цепью. Расстояние между осями шестеренок L = 26 см. На зубчиках шестеренок поставлены две метки – A и B. В некоторый момент времени эти метки оказались на минимальном расстоянии друг от друга (см. рисунок). Найдите величину скорости метки B относительно метки A в этот момент времени. Известно, что величина линейной скорости звеньев цепи постоянна и равна 0,7 м/с. Ответ укажите в м/с с точностью до сотых.

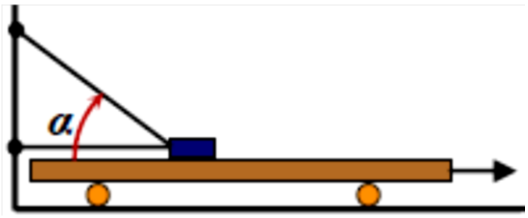


ОТВЕТ: 1,54.

КОММЕНТАРИЙ: Система отсчета, связанная с меткой А – это СО, связанная с малой шестеренкой, вращающейся с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{r}$. Поэтому точка, которая бы совпадала по положению с меткой В и покоилась бы относительно А, двигалась бы относительно неподвижной СО «вверх» со скоростью $v'_B = \omega(L - R) = \frac{L-R}{r}v$. Сама метка В относительно неподвижной СО движется «вниз» со скоростью v (ясно, что линейные скорости зубчиков шестеренок равны линейной скорости звеньев цепи). Поэтому искомая скорость $v_{BA} = v'_B + v = \frac{L-R+r}{r}v = 1{,}54$ м/с.

Вопрос 3 (8 баллов):
Из-под небольшого массивного груза плавно вытягивают горизонтальную платформу. Груз удерживается на месте благодаря двум легким практически нерастяжимым нитям, вторые концы которых закреплены на жесткой вертикальной стенке так, что одна из них горизонтальна, а вторая наклонена к горизонту под углом $\alpha = \arcsin(0{,}6) \approx 36{,}87°$ (см.

рисунок), причем обе нити находятся в одной вертикальной плоскости. Коэффициент трения



между грузом и платформой $\mu = 1/4$. Нити изготовлены из одного материала, имеют одинаковые поперечные сечения, а длины их подобраны так, что в этом опыте они натягиваются одновременно. При этом сила натяжения горизонтальной нити равна T = 25 Н. Наклонную нить пережгли. Чему стала равна сила натяжения горизонтальной нити при плавном вытягивании платформы после этого? Ответ запишите в ньютонах, с точностью до десятых.

ОТВЕТ: 40,2.

КОММЕНТАРИЙ: Поначалу силу трения скольжения груза о платформу уравновешивала сумма горизонтальных проекций сил натяжения: $T_1 + T_2\cos(\alpha) = T_1 + \frac{4}{5}T_2 = \mu N$, причем сила нормальной реакции была равна $N = mg - T_2\sin(\alpha) = mg - \frac{3}{5}T_2$. Кроме того, можно найти отношение сил натяжения нитей, так как их коэффициенты жесткости обратно пропорциональны длинам $\left(\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{1}{\cos(\alpha)}\right)$, а деформации связаны условием одинаковости горизонтальных проекций ($\Delta l_2 = \Delta l_1 \cdot \cos(\alpha)$). Таким образом,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{k_2\Delta l_2}{k_1\Delta l_1} = \cos^2(\alpha) = \frac{16}{25}.$$

Находя из полученной системы силу натяжения горизонтальной нити, получим

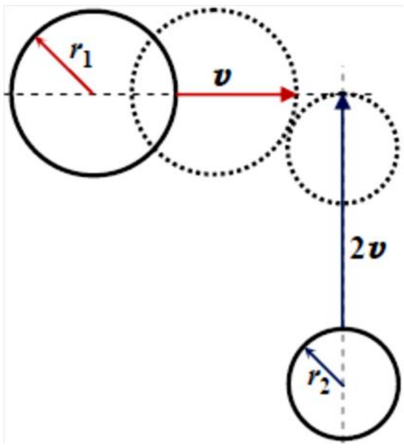
$$T_1 = \frac{125}{189 + 48\mu}\mu mg = T.$$

После пережигания верхней нити

$$T' = \mu mg = \frac{189 + 48\mu}{125}T = \frac{201}{125}T = 40{,}2 \text{ Н.}$$

Часть II (проверялись решения).

1. («Абсолютно неупругий удар», 20 баллов): Два тонкостенных кольца изготовлены из одного материала, имеют одинаковые толщину и высоту, но разные радиусы: $r_1 = 1{,}5 \cdot r_2$. Они скользили, не вращаясь, по гладкой горизонтальной поверхности. Величина скорости второго кольца была в два раза больше, чем у первого, а их направления были взаимно перпендикулярны. Кольца были запущены таким образом, что произошел удар, в момент начала которого линия движения центра первого кольца проходила по касательной к поверхности второго (см. рисунок). Боковые поверхности колец были обработаны специальным составом, благодаря которому в момент удара кольца мгновенно «склеились» и после удара двигались как одно целое. Во сколько раз после удара величина скорости центра масс склеившихся колец будет отличаться от v? В каком направлении стал двигаться этот центр масс? Какая часть начальной кинетической энергии колец (в процентах) перешла в тепло в результате этого соударения?

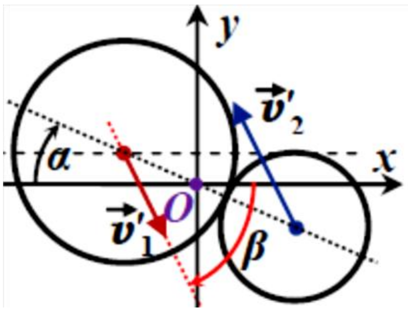


ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Пусть масса кольца 2 равна m. Тогда, конечно, масса кольца 1 равна $1{,}5 \cdot m$. Суммарный импульс колец остается постоянным. Поэтому скорость центра масс склеившихся колец определяется из уравнения

$$\frac{5}{2}m\cdot\vec{V}=\frac{3}{2}m\vec{v}_1+m\vec{v}_2\Rightarrow\vec{V}=\frac{3}{5}\vec{v}_1+\frac{2}{5}\vec{v}_2\Rightarrow V=v\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=v.$$

Таким образом, величина скорости центра масс склеившихся колец после удара равна v.



Направлена эта скорость под углом $\varphi=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$ к оси x. Перейдем теперь в инерциальную систему отсчета, связанную с этим центром масс. На рисунке показано положение колец и их скорости в этой СО в момент «начала удара» (начало координат совмещено с ЦМ, ось x направлена по скорости $\vec{v}_1$, а ось y – по скорости $\vec{v}_2$). Линия, соединяющая центры колец, наклонена к оси x под углом α, причем, как видно из рисунка, $\sin(\alpha)=\frac{r}{r+1{,}5\cdot r}=\frac{2}{5}$. Центр масс колец O находится на расстоянии $\frac{m(r+1{,}5\cdot r)}{m+1{,}5\cdot m}=r$ от центра кольца 1 (и на расстоянии $1{,}5\cdot r$ от центра кольца 2). Скорость центров колец до удара в этой ИСО равны $\vec{v}'_1=\vec{v}_1-\vec{V}=\frac{2}{5}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$ и $\vec{v}'_2=\vec{v}_2-\vec{V}=-\frac{3}{5}(\vec{v}_1-\vec{v}_2)$. Как видно, модули этих скоростей $|\vec{v}'_1|=\frac{2}{5}|\vec{v}_1-\vec{v}_2|=\frac{2}{\sqrt{5}}v$ и $|\vec{v}'_2|=\frac{3}{5}|\vec{v}_1-\vec{v}_2|=\frac{3}{\sqrt{5}}v$, и они направлены вдоль линии, составляющей с осью x угол $\beta=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Угол между этими двумя линиями $\gamma\equiv\beta-\alpha=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-\arcsin\left(\frac{2}{5}\right)\approx 39{,}86°$. До удара кольца не вращаются, и их суммарная кинетическая энергия – это энергия поступательных движений

$$E'_0=\frac{3m}{4}v'^2_1+\frac{m}{2}v'^2_2=\frac{3m}{2}v^2.$$

После удара ЦМ составного тела покоится, и кинетическая энергия системы – энергия вращательного движения. Ее можно вычислить, разбивая кольца на малые элементы и суммируя вклады элементов (вычисляя соответствующий интеграл). Проще использовать понятия и формулы динамики твердого тела (где эти операции уже выполнены). В самом деле, *момент импульса* системы шайб до удара

$$L=(mv'_2r_2+1{,}5m\cdot v'_1r_1)\cdot\sin(\gamma)=\frac{3(\sqrt{21}-1)}{5}mvr.$$

Здесь учтено, что $\sin(\gamma)=\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)-\cos(\beta)\cdot\sin(\alpha)=\frac{2(\sqrt{21}-1)}{5\sqrt{5}}$. Момент импульса в этом ударе сохраняется, но после удара он связан именно с вращением образовавшегося «составного» тела: $L=I\cdot\omega$. *Момент инерции* этого тела

$$I=\frac{3m}{2}\left(r^2+\frac{9}{4}r^2\right)+m\left(\frac{9}{4}r^2+r^2\right)=\frac{65}{8}mr^2.$$

Следовательно,

$$\omega=\frac{8}{65}\frac{3(\sqrt{21}-1)}{5}\frac{v}{r}=\frac{24(\sqrt{21}-1)}{325}\frac{v}{r}\approx 0{,}026456\frac{v}{r}.$$

Кинетическая энергия после удара

$$E'=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{72(11-\sqrt{21})}{1625}mv^2.$$

Выделившееся тепло равно убыли механической энергии и не зависит от выбора ИСО

$$Q=E'_0-E'=\frac{3\left(1097+48\sqrt{21}\right)}{3250}mv^2,$$

а начальная энергия в исходной ИСО $E_0=\frac{11}{4}mv^2$. В итоге приходим к ответу на последний вопрос:

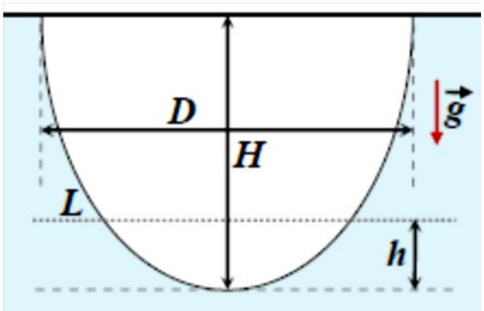
$$\frac{Q}{E_0} = \frac{6\left(1097 + 48\sqrt{21}\right)}{17875} \approx 0{,}442\,.$$

ОТВЕТЫ: величина скорости ЦМ практически равна начальной скорости тела 2 $V \approx v$, она направлена под углом $\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53{,}13°$ к оси x, доля энергии, преобразованной в тепло $\frac{Q}{E_0} = \frac{6\left(1097+48\sqrt{21}\right)}{17875} \approx 0{,}442$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Правильно описано движение ЦМ системы после удара		**8**
	1.1	Правильно записан ЗСИ для неупругого соударения колец	1
	1.2	Доказано, что $V \approx v$	3
	1.3	Найдено значение угла $\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \approx 53{,}13°$.	4
2	Правильно найдена доля энергии, перешедшая в тепло при ударе		**12**
	2.1	Записана правильная система уравнений, из которых можно определить угловую скорость вращения «составного» тела.	2
	2.2	Правильно найдены аналитическое выражение или числовое значение ω	5
	2.3	Получена правильная формула и численное значение Q/E_0	3+2=5
	ВСЕГО		**20**

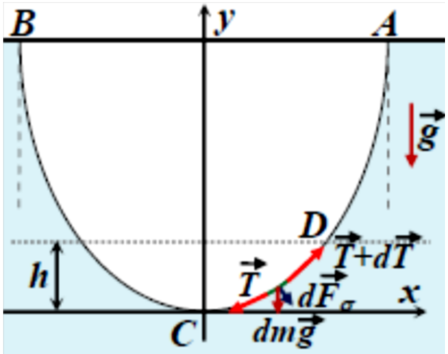
2. («Отверстие в пленке», 20 баллов): На достаточно большом (размер в любом направлении более метра) плоском каркасе, установленном вертикально, создана пленка из мыльного раствора. К горизонтальной верхней стороне его рамки прикреплены концы практически нерастяжимой тонкой нити длиной L = 64 см с массой m = 6,4 г. Нить «приклеилась» к пленке, и после этого пленку внутри нити аккуратно прокололи так, что «снаружи» от нити, между ней и каркасом, пленка уцелела. В результате пленка растянула нить, а внутри нити получилось «отверстие в пленке» (см. рисунок). Оказалось, что если расстояние между точками прикрепления концов нити D = 32 см, то максимальный размер отверстия по вертикали в состоянии равновесия точно равен H = 24 см, а касательные к нити в точках прикрепления вертикальны. Определите коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора. Найдите максимальную и минимальную величину силы натяжения нити. Оцените длину участка нити, лежащего в полосе на высоте (над нижней точкой нити), не превышающей h = 6 см. Масса пленки пренебрежимо мала, ускорение свободного падения считайте примерно равным 10 м/с^2.



Указание: *Силы поверхностного натяжения* – силы, «стягивающие» поверхность жидкости благодаря межмолекулярным взаимодействиям. Для данной задачи важно, что каждая поверхность жидкости, ограниченная каким-либо смачиваемым телом (например – нитью), будет действовать на это тело с силой, перпендикулярной границе и направленной в сторону жидкости. Вы можете считать, что величина этой силы, приходящейся на кусочек нити длиной Δl для каждой из поверхностей жидкости равна $\Delta F = \sigma \cdot \Delta l$, где σ – это *коэффициент поверхностного натяжения* жидкости.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Каждый участок нити находится в равновесии под действием силы тяжести (направленной вниз), силы поверхностного натяжения (направлена перпендикулярно нити в каждой точке) и сил натяжения нити на концах этого участка (направлены по касательной к нити). Введем систему координат: ось x направим горизонтально, ось y – вертикально, а начало координат совместим с нижней точкой нити. Для начала обратим внимание, что проекции силы натяжения, действующей на <u>бесконечно малый</u> участок нити длиной dl, касательная к которому составляет угол α с осью x, равны (см. рисунок) $dF_{\sigma\, x} = 2\sigma \cdot dl \cdot \sin(\alpha) = 2\sigma \cdot dy$ и $dF_{\sigma\, y} = -2\sigma \cdot dl \cdot \cos(\alpha) = -2\sigma \cdot dx$. Множитель «2» появился из-за того, что наша пленка – двусторонняя. Значит, проекция силы поверхностного натяжения на некоторую выбранную ось пропорциональна проекции участка на ось, перпендикулярную выбранной. Если мы выделим теперь произвольный (не малый) участок нити (например, DE), то, суммируя вклады его бесконечно малых участков, получим:



$$F_{\sigma x}^{DE} = \sum_{E}^{D} dF_{\sigma\, x} = 2\sigma \sum_{E}^{D} dy = 2\sigma(y_D - y_E),$$

$$F_{\sigma y}^{DE} = \sum_{E}^{D} dF_{\sigma\, y} = -2\sigma \sum_{E}^{D} dx = 2\sigma(x_E - x_D),$$

Еще одно важное соотношение для любого отрезка нити можно получить из принципа Мопертюи (виртуальных перемещений). Так как отрезок находится в равновесии, то суммарная работа действующих на него сил на бесконечно малом «виртуальном» перемещении из этого положения равна нулю. Можно рассмотреть перемещение участка DE на расстояние ds «вдоль нити». Сила поверхностного натяжения на этом перемещении работы не совершает, а работу силы тяжести можно посчитать через изменение потенциальной энергии участка в поле тяжести (наше перемещение эквивалентно переносу «кусочка» веревки с массой $dm = \frac{m}{L} dl$ от одного конца участка к другому). Таким образом:

$$T_D \cdot ds - T_E \cdot ds + dm \cdot g(y_E - y_D) = 0 \Rightarrow T_D = T_E + \frac{mg}{L}(y_D - y_E).$$

Сила натяжения нити растет снизу вверх (то есть минимальная ее величина в точке C, а максимальная в точке A), причем ее изменение определяется только силами тяжести, а кривизна нити зависит и от сил поверхностного натяжения.

Теперь запишем условия равновесия половины нити (участка CA) вместе уравнением, следующим из принципа Мопертюи:

$$\left\{\begin{matrix} T_A = \dfrac{mg}{2} + \sigma D \\ T_C = 2\sigma H \\ T_A = T_C + \dfrac{mg}{L} H \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sigma = \dfrac{L - 2H}{2H - D}\dfrac{mg}{2L} = \dfrac{mg}{2L} \approx 0{,}05\ \text{Н/м} \\ T_A = \dfrac{3}{4} mg \approx 48\ \text{мН} \\ T_C = \dfrac{3}{8} mg \approx 24\ \text{мН} \end{matrix}\right. .$$

Тем самым получены ответы на первые три вопроса. Для ответа на четвертый запишем те же уравнения для отрезка нити от точки C до произвольной точки с координатами x,y ($\vec{T}$ – сила натяжения нити, приложенная к его верхнему концу, $m(y)$ – масса участка нити, лежащего в полосе на высоте (над нижней точкой нити), не превышающей y, α – угол наклона касательной к нити в этой точке), и используем в них полученные результаты и соотношения между известными размерами нити

$$\begin{cases} T_x = T_C - 2\sigma y = \frac{3}{8}mg\left(1 - \frac{y}{H}\right) \\ T_y = \frac{1}{2}m(y)g + 2\sigma x = \frac{1}{2}m(y)g + mg\frac{x}{L} \\ T = T_C + \frac{mg}{L}y = \frac{3}{8}mg\left(1 + \frac{y}{H}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \frac{3}{4}mg\sqrt{\frac{y}{H}} \\ \frac{m(y)}{m} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{H}} - \frac{2x}{L} \\ tg(\alpha) = \frac{T_y}{T_x} = \frac{2\sqrt{Hy}}{H - y} \end{cases}.$$

В силу однородности нити доля длины нужного нам участка равна доли его массы от общей массы нити. Как видно, для нахождения $\frac{m(h)}{m}$ нужно определить координату x точки нити с $y = h$. В принципе эту величину можно найти точно, используя последнее уравнение (и очевидную связь $tg(\alpha) = \frac{dy}{dx}$), но для этого нужно выполнить «настоящее» интегрирование:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{Hy}}{H - y} \Rightarrow dx = \frac{H - y}{2\sqrt{Hy}}dy \Rightarrow x(h) = \frac{1}{2}\int_0^h \left(\sqrt{\frac{H}{y}} - \sqrt{\frac{y}{H}}\right)dy = \sqrt{Hh} - \frac{h^{3/2}}{3\sqrt{H}}.$$

С учетом $h = \frac{H}{4}$ находим, что $x(h) = \frac{11}{24}H = 11$ см. Значит,

$$l(h) = \frac{m(h)}{m}L = \frac{3}{4}L - \frac{11}{12}H = \frac{13}{32}L = 26\text{ см}.$$

Но для оценки (а в условии просили именно оценить эту величину) можно действовать и без интегрирования. Например, вычислив угол наклона касательной в этой точке к горизонту $\frac{dy}{dx}(h) = \frac{2\sqrt{Hh}}{H-h} = \frac{4}{3}$, можно приблизить участок нити дугой окружности с общими касательными на концах. Тогда угловой размер этой дуги равен $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$, и ее радиус определяется из соотношения

$$h = \frac{H}{4} = R(1 - \cos(\varphi)) = \frac{2}{5}R \Rightarrow R = \frac{5}{8}H \Rightarrow l(h) \approx 2R\varphi = \frac{5H}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right).$$

Тогда

$$l(h) \approx \frac{5H}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{15}{32}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) \cdot L \approx 27{,}8\text{ см}.$$

Как видно, получилась вполне приличная точность (относительная ошибка около 7 %). Можно использовать и другие кривые, длину участка которых мы умеем вычислять.

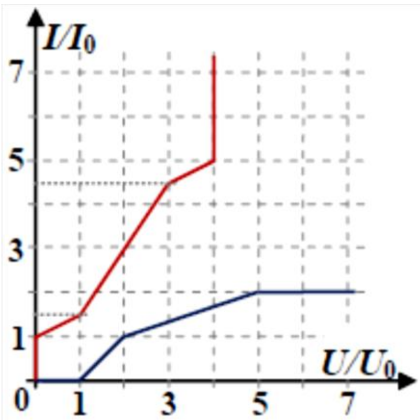
ОТВЕТЫ: $\sigma = \frac{L-2H}{2H-D}\frac{mg}{2L} = \frac{mg}{2L} \approx 0{,}05$ Н/м, $T_{min} = \frac{3}{8}mg \approx 24$ мН, $T_{max} = \frac{3}{4}mg \approx 48$ мН, $l(h) = \frac{13}{32}L = 26$ см.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Определение σ и сил натяжения		**12**
	1.1	Правильно записаны выражения для компонент сил поверхностного натяжения, действующих на участок нити	1+1=2
	1.2	Получено правильное выражение для зависимости силы натяжения нити от высоты	2
	1.3	Записана правильная полная система уравнений, позволяющая найти σ, $T_{\min}$ и $T_{\max}$.	2
	1.4	Получены правильные ответы (формула через mg и размеры + числовой ответ) для σ	1+1=2

	1.5	Получены правильные ответы (формула через mg + числовой ответ) для $T_{\min}$	1+1=2
	1.6	Получены правильные ответы (формула через mg + числовой ответ) для $T_{\max}$	1+1=2
2	Нахождение $l(h)$		**8**
	2.1	Записана система трех независимых уравнений для силы тяжести и силы натяжения нити подходящего участка.	1
		Получено правильное уравнение для определения $l(y)/L$ или $m(y)/m$ по y и x	1
		Получено правильное уравнение определения tg(α) по y	1
	2.2	Выполнено необходимое интегрирование или предложен корректный (с погрешностью менее 20%) метод оценки $l(h)$	3
	2.3	Получена правильная (для используемого метода) формула для $l(h)$ и численное значение в интервале от 22 см до 30 см	1+1=2
	ВСЕГО		**20**

3. («ВАХ-ВАХ», 18 баллов): Два *нелинейных элемента* X1 и X2 имеют *кусочно-линейные* вольт-амперные характеристики – ВАХ (то есть их графики состоят из отрезков прямых). На графике показаны ВАХ их параллельного (красным) и последовательного (синим) соединений в интервалах значений силы тока и напряжения $\{0 \le I \le 7{,}4 \cdot I_0, 0 \le U \le 7{,}2 \cdot U_0\}$. Постройте ВАХ самих элементов X1 и X2. В каких областях значений силы тока и напряжения мы можем это сделать?



ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

При параллельном соединении напряжения на двух элементах одинаковы, а суммарная сила тока равна сумме сил токов через каждый элемент. Поэтому для получения ВАХ параллельного соединения нужно для каждой пары точек ВАХ элементов при одном значении напряжения получить точку ВАХ параллельного соединения, сложив значения сил токов элементов. Аналогично ВАХ последовательного соединения получается сложением напряжений на элементах при одном значении силы тока. Этот подход можно реализовывать как непосредственно на графике, так и аналитически. Действительно, пусть у нас есть два элемента, для которых на некотором участке значений напряжений и сил токов ВАХ описываются линейными выражениями. Тогда:

$$\left\{\begin{matrix} I_1 = a_1 U_1 + b_1 \\ I_2 = a_2 U_2 + b_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} I_\parallel = (a_1 + a_2)U_\parallel + (b_1 + b_2) \equiv A_\parallel U_\parallel + B_\parallel \\ I_+ = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} U_+ + \dfrac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2} \equiv A_+ U_+ + B_+ \end{matrix}\right. .$$

Здесь символом «+» обозначено последовательное соединение. Значит, определив по графику коэффициенты линейных ВАХ последовательного и параллельного соединений, можно в соответствующей области значений силы тока и напряжения найти коэффициенты линейных ВАХ самих элементов, решая последовательно системы уравнений

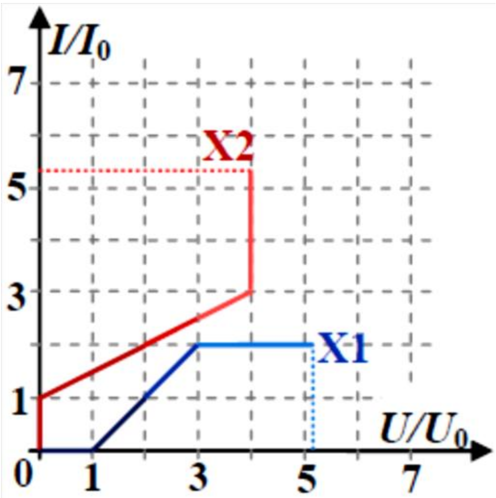
$$\left\{\begin{matrix} a_1 + a_2 = A_\parallel \\ \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = A_+ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{A_\parallel \pm \sqrt{A_\parallel^2 - 4A_\parallel A_+}}{2}$$

и

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = B_\parallel \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 = A_\parallel B_+ \end{cases} \Rightarrow b_{1,2} = \pm \frac{B_+ A_\parallel - a_{1,2} B_\parallel}{\sqrt{A_\parallel^2 - 4 A_\parallel A_+}}.$$

Важное следствие этих вычислений состоит в том, что мы доказали: если на некотором участке значений напряжения (силы тока) ВАХ элементов линейны, ВАХ их параллельного и последовательного и параллельного соединений на соответствующих участках тоже линейны, и наоборот.

В данной задаче удобно сразу обратить внимание на то, что один из элементов (далее будем считать его «первым», или X1) имеет «порог открытия» - при напряжениях менее U_0 он не пропускает ток (это видно на ВАХ последовательного соединения, в то время как на ВАХ параллельного соединения такого порога нет). Значит, в этом диапазоне напряжений ВАХ параллельного соединения – это ВАХ элемента X2. Тогда мы знаем, что X2 пропускает токи менее I_0 при практически нулевом напряжении, и поэтому в этой области ВАХ последовательного соединения – это участок ВАХ элемента X1. Знание этого участка позволят нам достроить ВАХ элемента X2 до напряжения $2U_0$, вычитая силу тока X1 из значения для ВАХ параллельного соединения (на рисунке эти «начальные участки ВАХ элементов показаны более темным цветом). Таким образом, можно поэтапно достраивать обе ВАХ. Например, в диапазоне $2U_0 < U < 3U_0$ можно записать уравнения ВАХ соединений $I_+ = \frac{I_0}{3U_0} U_+ + \frac{I_0}{3U_0}$ и $I_\parallel = \frac{3I_0}{2U_0} U_\parallel$, и по формулам, написанным выше, найти уравнения ВАХ элементов: $I_1 = \frac{I_0}{U_0} U_1 - I_0$ и $I_2 = \frac{I_0}{2U_0} U_2 + I_0$. Мы обнаруживаем, что на этом участке они являются продолжениями уже известных нам прямых (чуть более светлые участки). Кроме того, на ВАХ последовательного соединения мы видим, что один из элементов во всей исследованной области напряжений ограничивает ток, не позволяя ему подняться выше $2I_0$. По уже известным участкам мы понимаем, что это может быть только X1, и при этом значении силы тока излом на ВАХ последовательного соединения при напряжении $5U_0$ соответствует напряжению на X1, равном $3U_0$ (и еще $2U_0$ на X2). Итак, на ВАХ X1 переход в режим стабилизации тока происходит при напряжении $3U_0$ (светлый участок). Мы также видим, что вплоть до суммарного напряжения $7{,}2 \cdot U_0$ ток через X1 остается равным $2I_0$,и поэтому мы знаем поведение ВАХ X1 вплоть до напряжения $7{,}2 \cdot U_0 - 2 \cdot U_0 = 5{,}2 \cdot U_0$. Затем мы просто достраиваем ВАХ X2 по ВАХ параллельного соединения (светлый участок; впрочем, мы могли заметить, что у него есть режим ограничения напряжения и до анализа ВАХ X1). При этом ВАХ элемента X2 по имеющимся данным мы строим в области значений силы тока вплоть до $5{,}4 \cdot I_0$. Итак, мы построили ВАХ элементов.



Нужно понимать, что такая процедура не является, строго говоря, однозначной. Мы должны обратить внимание, что перестановка двух элементов и в последовательном, и в параллельном соединениях не изменит у них связь силы общего тока с общим напряжением. Но можно убедиться, что в данной задаче требование «однозначности» ВАХ (что каждому значению напряжения на обеих ВАХ элементов соответствует одно значение силы тока) исключает другие решения (неоднозначные ВАХ существуют, но для соответствующих элементов устойчивые режимы работы могут зависеть от способа их получения).

ОТВЕТ: На рисунке.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Описана связь ВАХ элементов с ВАХ их соединений		**4**
	1.1	Связь правильно описана для параллельного соединения	1
	1.2	Связь правильно описана для последовательного соединения	1
	1.3	Описан (используется в решении) способ восстановления линейных ВАХ элементов по ВАХ соединений (аналитический или графический)	2
2	Построение ВАХ нелинейных элементов		**14**
	2.1	Правильно построены начальные участки ($U < 2U_0$) элементов	1+1=2
	2.2	Правильно построены участи ВАХ до перехода в режимы ограничений	2+2=4
	2.3	Правильно показаны точки перехода и прямые для этих режимов	2+2=4
	2.4	Правильно указаны области обоснованного построения ВАХ	2+2=4
	ВСЕГО		**18**

4. («Как найти линзу», 17 баллов) Центр очень маленького светящегося шарика поместили в точку А на главной оптической оси тонкой линзы, и центр его изображения оказался в точке В, находящейся на расстоянии 98 см от точки А. Когда центр шарика поместили в точку В, его изображение в этой же линзе оказалось в точке С, находящейся от А на расстоянии 147 см. Чему может быть равна оптическая сила этой линзы? На каком расстоянии от А может оказаться центр изображения шарика, если поместить его в точку С?

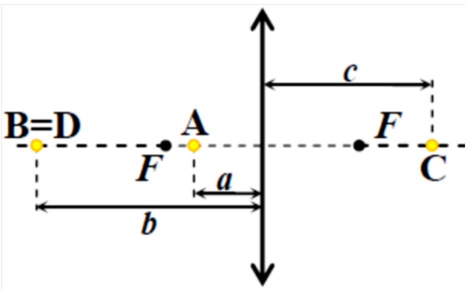
ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

В первую очередь обсудим причину, по которой в нашей системе «не работает» принцип обратимости хода световых лучей – при помещении предмета в точку В его изображение оказывается не в точке А. Ясно, что это возможно только в том случае, если при расположении предмета в точке А в В реальные световые лучи не попадают, то есть изображение в точке В является мнимым. Кроме того, нам неизвестен тип линзы (является она собирающей или рассеивающей), и мы должны проанализировать оба случая. Тем более что на это прямо указано в условии – нас просят найти все возможные варианты ответа.

Случай собирающей линзы: Обозначим расстояние от А, В и С до линзы a, b и c соответственно, а фокусное расстояние F (как обычно, будем считать их алгебраическими величинами – с учетом знака). В данном случае $F > 0$, а $a < F$. Введем еще одно обозначение $x \equiv a/F$ $(0 < x < 1)$ и запишем формулу линзы для обеих пар точек:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{1}{xa} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{F} \\ \dfrac{1}{|b|} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{F} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} b = \dfrac{x}{x-1}F \\ c = \dfrac{x}{2x-1}F \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |AB| \equiv l = |a+b| = \dfrac{x^2}{1-x}F \\ |AC| = \dfrac{3}{2}l = |a+c| = \dfrac{2x^2}{|2x-1|}F \end{cases}.$$

Здесь мы использовали соотношение между заданными расстояниями. Нетрудно заметить,



что, в зависимости о величины x, изображение в точке С может быть действительным (при $x > 0{,}5$) или мнимым ($x < 0{,}5$), и что мы использовали форму записи с модулем, чтобы формулы описывали правильно оба этих случая. Как видно, знание отношения расстояний дает нам уравнение на x:

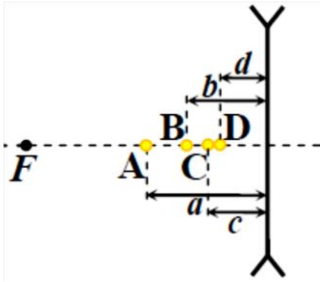
$$\frac{3}{2} = 2\frac{1-x}{|2x-1|} \Rightarrow 3|2x-1| = 4(1-x|,$$

единственным корнем которого в допустимом диапазоне является $x_1 = 0{,}7$. Значит,

$$F_1 = \frac{1 - x_1}{x_1^2} l = \frac{30}{49} l = 60 \text{ см} \Rightarrow D_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{5}{3} \text{ дптр} \approx 1{,}67 \text{ дптр}.$$

Случай рассеивающей линзы. Теперь $D = \frac{1}{F} < 0$, и удобнее определить $x \equiv a/|F|$ $(x > 0)$. После аналогичных вычислений

$$\begin{cases} \frac{1}{xa} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{|F|} \\ \frac{1}{|b|} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{|F|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{x}{x+1}|F| \\ c = -\frac{x}{2x+1}|F| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\mathrm{AB}| \equiv l = |a+b| = \frac{x^2}{1+x}|F| \\ |\mathrm{AC}| = \frac{3}{2} l = |a+c| = \frac{2x^2}{2x+1}|F| \end{cases},$$



(здесь оба изображения, естественно, мнимые) находим, что

$$\frac{3}{2} = 2\frac{1+x}{2x+1} \Rightarrow 3(2x+1) = 4(1+x) \Rightarrow x_2 = 0{,}5.$$

Следовательно, второе возможное значение оптической силы линзы

$$|F_2| = \frac{1 + x_2}{x_2^2} l = 6l = 5{,}88 \text{ м} \Rightarrow D_2 = \frac{1}{F_2} = -\frac{25}{147} \text{ дптр} \approx$$
$$\approx -0{,}170 \text{ дптр}.$$

Теперь мы легко находим расстояние до третьего изображения (D) в обоих случаях: для собирающей линзы D_1 совпадает с B, и $|AD_1|$ =|AB| =98 см, а для рассеивающей $d = -\frac{1}{5}|F|$, и поэтому $|\mathrm{AD}_2| = 0{,}3|F_2| = 1{,}8l = 1{,}764$ м.

ОТВЕТЫ: возможные значения: $D_1 = \frac{5}{3}$ дптр $\approx 1{,}67$ дптр, и тогда $|AD_1|$ =|AB| =98 см, или $D_2 = -\frac{25}{147}$ дптр $\approx -0{,}170$ дптр, и тогда $|\mathrm{AD}_2| = 1{,}8|\mathrm{AB}| = 1{,}764$ м.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№		действие	макс. балл
1		Задача правильно решена для собирающей линзы	**9**
	1.1	Объяснено, что изображение в точке B мнимое	1
	1.2	Правильно записана система из двух уравнений линзы	2
	1.3	Получено одно правильное уравнение для оптической силы линзы или для однозначно связанного с ней параметра	2
	1.4	Правильно определена оптическая сила линзы (численное значение в интервале от 1,65 дптр до 1,69 дптр)	3
	1.5	Правильно найдено точное значение $|AD_1|$ =98 см	1
2		Задача правильно решена для рассеивающей линзы	**8**
	2.1	Правильно записана система из двух уравнений линзы	2
	2.2	Получено одно правильное уравнение для оптической силы линзы или для однозначно связанного с ней параметра	2
	2.3	Правильно определена оптическая сила линзы (численное значение в интервале от – 0,16 дптр до –0,18 дптр)	3
	2.4	Правильно найдено значение $|AD_2|$ в диапазоне от 1,75 м до 1,78 м	1
		ВСЕГО	**17**

***Максимальная оценка за часть* II: 75 баллов.**