

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

2025/26 учебный год, ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. 11 классы.

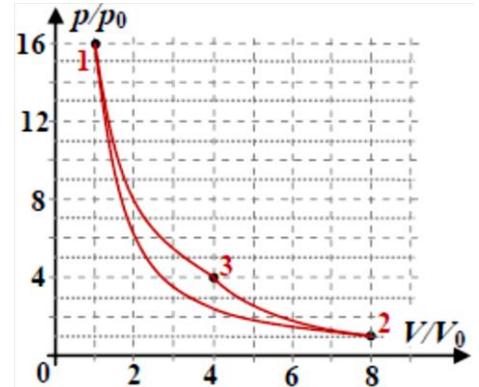
ЗАДАНИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

Часть I (проверялись только ответы).

Пример варианта (численные данные варьировались):

Вопрос 1 (9 баллов):

На рисунке показана диаграмма циклического процесса 1-2-3-1 над постоянным количеством идеального газа в координатах давление-объем. Известно, что во всех трех составляющих этот цикл процессах теплоемкость газа постоянна, причем в одном из них она равна нулю. В процессе 2-3 к газу подведено количество теплоты, равное 630 Дж. Найдите работу газа в адиабатическом процессе. Ответ запишите в Дж, с точностью до целого значения.



ОТВЕТ: 945.

**КОММЕНТАРИЙ:** Все процессы – политропические ( $pV^n = const$ ), причем один из них – адиабата. По удобным точкам определим показатели политроп: в процессе 1-2 при увеличении объема в 8 раз давление уменьшилось в 16 раз, что отвечает  $n = \frac{4}{3}$ , и это – показатель адиабаты многоатомного идеального газа, процесс 2-3 отвечает  $n = 2$ , а процесс 3-1 – изотерма, так как в нем  $pV = const$ . В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не изменяется, то есть  $\Delta U_{23} = -\Delta U_{12} = A_{12}$  (мы выяснили, что 1-2 – адиабата). В процессе 2-3 работа равна

$$A_{23} = p_2 V_2^2 \cdot \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V^2} = p_2 V_2 \frac{V_3 - V_2}{V_3}.$$

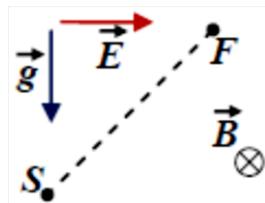
Изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{23} = 3(p_3 V_3 - p_2 V_2) = -3A_{23} \Rightarrow Q_{23} = -2A_{23} = \frac{2}{3}\Delta U_{23}.$$

Таким образом,  $A_{12} = \frac{3}{2}Q_{23} = 945$  Дж.

Вопрос 2 (8 баллов):

В некоторой области пространства, из которой откачан воздух, существует однородное поле



тяжести  $\vec{g}$  и созданы также горизонтальные однородные электрическое ( $\vec{E}$ ) и магнитное ( $\vec{B}$ ) поля. Из точки  $S$  в этой области отпускают без начальной скорости маленький положительно заряженный шарик, который спустя время  $t = 15$  мс оказывается в точке  $F$ , расположенной на расстоянии  $L = 65$  см от точки  $S$  (см. рисунок). Известно, что масса и заряд шарика таковы, что  $qE = mg$ , и что прямая  $SF$  составляет угол  $45^\circ$  с горизонтом.

Найдите величину скорости шарика в точке  $F$ .

ОТВЕТ: 0.

**КОММЕНТАРИЙ:** Как видно, линия, соединяющая точки  $S$  и  $F$ , перпендикулярна линии действия результирующей силы, действующей на шарик со стороны электрического поля и поля тяжести. Значит, работа этих сил на траектории  $SF$  равна нулю. Работа силы Лоренца всегда равна нулю. Значит, кинетическая энергия шарика при перемещении между начальной и конечной точками не изменилась и осталась равной нулю.

Вопрос 3 (8 баллов):

Определим *поперечное увеличение* тонкой линзы как отношение поперечных (перпендикулярных главной оптической оси линзы) размеров изображения и предмета, взятое со знаком «плюс», если изображение прямое, и со знаком «минус», если перевернутое.

Небольшой предмет разместили на ГОО тонкой линзы в точке А, и его поперечное увеличение оказалось равно  $\Gamma_A = +1,4$ . Потом его, не поворачивая, переместили в точку В (тоже на ГОО, с той же стороны от линзы), и его поперечное увеличение стало равно  $\Gamma_B = -2,4$ . Определите поперечное увеличение изображения этого предмета, если его, не поворачивая, перенести в точку С, расположенную точно между А и В? Ответ запишите с точностью до сотых.

**ОТВЕТ: 6,72.**

**КОММЕНТАРИЙ:** Ясно, что линза собирающая – рассеивающие линзы всегда дают прямые изображения реальных предметов. Увеличение изображения, определенное с учетом знака, равно  $\Gamma = \frac{F}{F-a}$ . Следовательно,  $a = \frac{\Gamma-1}{\Gamma}F$ . Поэтому для точек А и В получаем:

$a_A = \frac{\Gamma_A-1}{\Gamma_A}F$ ,  $a_B = \frac{|\Gamma_B|+1}{|\Gamma_B|}F$ . Так как точка С находится посередине между А и В, то

$a_C = \frac{a_A+a_B}{2} = F\left(1 + \frac{\Gamma_A-|\Gamma_B|}{2\Gamma_A|\Gamma_B|}\right)$ . Так как по условию  $\Gamma_A < |\Gamma_B|$ , то  $a_C < F$ , и изображение для

точки С прямое. Значит,  $\Gamma_C = \frac{F}{F-a_C} = \frac{2\Gamma_A|\Gamma_B|}{|\Gamma_B|-\Gamma_A} = 6,72$ .

### Часть II (проверялись решения). «ДВА ИНЖЕНЕРА».

*История, рассказанная ниже, выдумана. Ее персонажи – литературные герои А.Н. Толстого и Д.А. Гранина. У авторов они были слишком разными и не могли встретиться. Впрочем, это не имеет прямого отношения к нашим задачам. Итак, приступим...*

Однажды на улице инженера Лобанова окликнул незнакомый старомодно одетый человек:

– Здравствуйте, Андрей Николаевич!

– Добрый день! Мы знакомы? – спросил его Лобанов.

– Пока нет! – ответил тот, – Но я надеюсь, что мы станем хорошими знакомыми. Я тоже инженер, меня зовут Гарин Петр Петрович.

– Я читал об инженере Гарине – немного удивленно проговорил Лобанов, – Но я думал, это просто литературное произведение.

– Не совсем – сказал Гарин, – Но там было очень много вымысла. К тому же я очень сильно изменился с тех пор. Сейчас я много работаю, и меня очень интересует использование квантовых свойств электронов для передачи и обработки информации. Я поэтому и хочу познакомиться с Вами.

– Да, после переезда в Москву я работаю в лаборатории электроники одного НПО. Но мы занимаемся большими устройствами. Они по сути макроскопические, и квантовые свойства там не очень проявляются.

– А что Вы думаете о сверхпроводимости?

– Да, это квантовое по природе явление, когда материал при очень низкой температуре полностью теряет электрическое сопротивление. Это очень перспективно, но пока не очень применимо на практике. Там нужен жидкий гелий, и с ним работают ученые. В нашей лаборатории нет таких возможностей.

– Тогда Вам будут интересны мои образцы. У Вас в лаборатории есть доступ к жидкому азоту?

– Да. Но я пока не очень понимаю...

– Потом поймете! – улыбнулся Гарин.

Прошло несколько дней. Лобанову удалось выяснить, что принесенный Гарином образец из материала, похожего на керамику, демонстрировал сверхпроводящие свойства в жидком азоте! Он был очень заинтересован и сказал, что это выдающееся открытие, и о нем нужно немедленно оповестить ученых.

– Не торопитесь, – ответил на это Гарин и продолжил, – Там много еще чего интересного, и нам нужно в этом внимательно разобраться. Для начала нужно исследовать образец 2. Это контур из такого же материала, но в нем есть вставка из диэлектрика, размыкающая цепь.

– Но тогда ток в этом контуре течь не будет!

– Все не так просто. В этом материале механизм сверхпроводимости не такой, как, например, у ртути, которую исследовал Камерлинг-Оннес. Да и потом, носитель заряда – это квантовая частица, и он может туннелировать (то есть «проскочить») через промежуток, в котором он не должен появляться. Напомню: на самом деле квантовая частица – например, электрон – не является «частицей» в классическом смысле. Для описания его движения мы должны анализировать поведение «волны вероятности», циклическая частота и волновое число которой связаны с энергией и импульсом соотношениями Планка и де Бройля:  $E = \hbar\omega$  и  $p = \hbar k$ . В этих выражениях используется постоянная Планка  $\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Для описания эффектов интерференции волн вероятности нам удобнее описывать их как *комплекснозначные функции*. Например, в макроскопическом сверхпроводящем образце электрон движется почти как свободный (можно принять, что его потенциальная энергия постоянна и равна нулю), и его импульс и энергия имеют почти точно определенные значения, так что его волна вероятности при одномерном движении вдоль оси  $x$  описывается выражениями вида  $\psi(t, x) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}px}$  или  $\psi(t, x) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et - \frac{i}{\hbar}px}$  (в зависимости от направления движения). Для такой волны *плотность вероятности* обнаружения частицы (в единице объема) равна  $|A|^2$ , а *поток вероятности* (вероятность прохождения частицы в единицу времени через единицу площади)  $\frac{p}{m}|A|^2$ . В диэлектрик электрон не может проникать на макроскопические расстояния, так что его можно рассматривать как область, в которой потенциальная энергия электрона  $U_0$  выше, чем кинетическая энергия  $E \approx \frac{p^2}{2m}$  в сверхпроводнике. Давайте-ка оценим вероятность такого «квантового скачка» электрона через диэлектрический промежуток толщиной, скажем, в 1 нм. Ведь даже если для одного электрона она будет очень малой, то с учетом того, что «свободных» электронов в нашем материале очень много, влияние этого эффекта на протекание тока может быть заметным.

**1. («Туннельный переход», 16 баллов).** Выведите формулу для *коэффициента прохождения*  $T$  электрона через описанный Гарином барьер (как функции  $E$ ). Так называется отношение потока вероятности за барьером к потоку вероятности, падающему на барьер. С помощью этой формулы оцените  $T$  численно для  $U_0 = 3$  эВ и  $E = \frac{1}{2}U_0$ . Масса электрона  $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг.

### **ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

**Вариант I:** В соответствии с описанной в условии схемой анализа поведения волн вероятности, введем ось  $x$ , направленную вдоль линии движения электрона, и будем считать область  $x < 0$  отвечающей сверхпроводнику «слева» от диэлектрика (потенциальная энергия электрона в этой области принята за ноль, величина его импульса  $p = \sqrt{2mE} = \sqrt{mU_0}$ ), область  $0 < x < L$  – отвечающей диэлектрическому промежутку (потенциальная энергия  $U_0$ , и поэтому для импульса получим  $p' = \sqrt{2m(E - U_0)} = i\sqrt{mU_0} = ip$ ), область  $x > L = 1$  нм – сверхпроводнику «справа» от диэлектрика (потенциальная энергия и импульс такие же, как «слева»). Полная энергия электрона при таком движении сохраняется, поэтому зависимость  $\psi$  от времени во всех областях одинакова. Если считать, что электрон «налетает» на препятствие слева, то волна вероятности при  $x < 0$  получается суперпозицией падающей и отраженной волн с разными амплитудами, то есть

$$\psi_1(t, x) = A \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}px} + B \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et - \frac{i}{\hbar}px}.$$

Тогда в диэлектрике – в области  $0 < x < L$  волна вероятности

$$\psi_2(t, x) = C \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et - \frac{1}{\hbar}px} + D \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{1}{\hbar}px}.$$

Наконец, в области  $x > L$  должна существовать только прошедшая волна

$$\psi_3(t, x) = F \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{1}{\hbar}px}.$$

На границах областей эти волны должны переходить друг в друга без «скачков» и «изломов» графиков вещественной и мнимой частей (отсутствие излома у графика означает отсутствие «скачков» производной по  $x$ ). Значит, амплитуды всех волн должны удовлетворять уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(t, 0) = \psi_2(t, 0) \Rightarrow A + B = C + D \\ \psi'_1(t, 0) = \psi'_2(t, 0) \Rightarrow iA - iB = -C + D \\ \psi_2(t, L) = \psi_3(t, L) \Rightarrow C \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}pL} + D \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} = F \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} \\ \psi'_2(t, L) = \psi'_3(t, L) \Rightarrow -C \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}pL} + D \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} = iF \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} \end{array} \right\} \quad (1).$$

Отметим, что здесь везде  $p = \sqrt{mU_0}$ . Нам нужно решить эту систему уравнений, выразив амплитуду прошедшей волны ( $F$ ) через амплитуду падающей волны ( $A$ ). Складывая и вычитая почленно два нижних уравнения (1), находим, что  $D = \frac{F}{2}(1+i) \cdot e^{\frac{i-1}{\hbar}pL}$  и  $C = \frac{F}{2}(1-i) \cdot e^{\frac{i+1}{\hbar}pL}$ . Подставив эти выражения в первые два уравнения (1), получим более простую систему из двух уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B = \frac{F}{2} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}pL} \left[ (1+i) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}pL} + (1-i) \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} \right] \\ A - B = \frac{F}{2} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}pL} \left[ (1-i) \cdot e^{-\frac{1}{\hbar}pL} + (1+i) \cdot e^{+\frac{1}{\hbar}pL} \right] \end{array} \right\}.$$

Еще раз складывая уравнения, приходим к результату

$$A = \frac{F}{2} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}pL} \left( e^{+\frac{1}{\hbar}pL} + e^{-\frac{1}{\hbar}pL} \right) \Rightarrow F = \frac{2 \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}pL}}{e^{+\frac{1}{\hbar}pL} + e^{-\frac{1}{\hbar}pL}} A.$$

Таким образом, поток вероятности в прошедшей волне равен

$$\frac{p}{m} |F|^2 = \sqrt{\frac{U_0}{m}} \frac{4|A|^2}{\left( e^{+\frac{1}{\hbar}pL} + e^{-\frac{1}{\hbar}pL} \right)^2},$$

и искомое отношение потоков вероятности

$$T = \frac{4}{\left( e^{+\frac{1}{\hbar}pL} + e^{-\frac{1}{\hbar}pL} \right)^2} = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2},$$

где  $z \equiv \frac{pL}{\hbar} = \frac{L}{\hbar} \sqrt{mU_0} \approx 6,294$ . Значит,  $T \approx 1,36 \cdot 10^{-5}$ .

**ОТВЕТ:**  $T = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2}$ , где  $z = \frac{L}{\hbar} \sqrt{mU_0}$ . Численное значение  $T \approx 1,36 \cdot 10^{-5}$ .

**Вариант II:** Можно *оценить*  $T$  с помощью приближенного подхода. Если обратить внимание на вид решения в области  $0 < x < L$ , то можно заметить, что оно состоит из двух экспонент – убывающей и растущей. Однако нам должно быть понятно, что эта вероятность туннелирования для достаточно широких барьеров (для которых она намного меньше 1) должна убывать с ростом ширины барьера. То есть для широких барьеров хорошую точность должно давать использование одной убывающей экспоненты  $\psi_2(t, x) \approx C \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et - \frac{1}{\hbar}px}$ . Вероятность связана с квадратом модуля  $\psi$ , то есть вероятность туннелирования можно оценить как  $T \approx e^{-\frac{2}{\hbar}pL} \approx 3,4 \cdot 10^{-6}$ . Это оценочное значение примерно в 4 раза меньше более точного, полученного выше, но ошибку *по порядку величины* можно считать небольшой.

**ОТВЕТ:**  $T \approx e^{-2z}$ , где  $z = \frac{L}{\hbar} \sqrt{mU_0}$ . Численное значение порядка  $T \approx 3,4 \cdot 10^{-6}$ .

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

| №               | действие  | макс. балл |
|-----------------|---|------------|
| <b>МЕТОД I</b>  |   |            |
| <b>1</b>        | Записаны правильные формулы для волны вероятности во всем пространстве  | <b>8</b>   |
|                 | 1.1 В областях 1 и 2 решение записывается в виде суммы решений с противоположными направлениями движения, в области 3 – в виде одной («прошедшей») волны  | 1×3=3      |
|                 | 1.2 Используется правильное значение величины импульса в областях 1 и 3 ( $p = \sqrt{2mE} = \sqrt{mU_0}$ )  | 1          |
|                 | 1.3 Указано, что импульс для области 2 нужно считать мнимым ( $p' = ip$ ), или для решения в области 2 используются решения с вещественными (убывающей и растущей) экспонентами с правильной величиной $p$ в показателе | 2          |
|                 | 1.4 Указано, что амплитуды волн должны удовлетворят условиям «сшивки», аналогичным (1)  | 2          |
| <b>2</b>        | Правильно определена величина коэффициента прохождения  | <b>8</b>   |
|                 | 2.1 Записана система уравнений для амплитуд, эквивалентная (1)  | 1          |
|                 | 2.2 Получена правильная связь амплитуд прошедшей и падающей волны.  | 3          |
|                 | 2.3 Получена правильная формула и правильное численное значение $T = \frac{4}{(e^z + e^{-z})^2} \approx 1,36 \cdot 10^{-5}$   | 2+2=4      |
| <b>ВСЕГО</b>    |   | <b>16</b>  |
| <b>МЕТОД II</b> |   |            |
| <b>1</b>        | Используется правильное приближенное описание поведения волны вероятности в «подбарьерной» области  | <b>5</b>   |
| 1.1             | Указано, что решение в этой области – комбинация вещественных (убывающей и растущей) экспонент с правильной величиной $p$ в показателе  | 3          |
|                 | 1.2 Объяснено, что в оценочном вычислении можно оставить только убывающую экспоненту.   | 2          |
| <b>2</b>        | Корректная оценка величины коэффициента прохождения.  | <b>6</b>   |
|                 | Указано (используется в решении), что вероятность связана с квадратом модуля $\psi$   | 2          |
|                 | Получена корректная приближенная формула и числовая оценка : $T \approx e^{-2z} \approx (2 - 8) \cdot 10^{-6}$  | 2+2=4      |
| <b>ВСЕГО</b>    |   | <b>11</b>  |

Однажды оба инженера сидели в лаборатории.

– Для меня Вы – большая загадка. Откуда у Вас эти образцы? Вы считаете себя инженером, но ведете исследования на переднем крае науки. Как это у Вас получается? – спросил Лобанов.

– Настоящий инженер должен быть немного ученым! - неожиданно резко сказал Гарин, – Иначе ему не изобрести ничего принципиально нового. Он должен с интересом смотреть на мир и изучать его. Так делали лучшие – да Винчи, Тесла, Шухов. Вот мне как-то довелось довольно много времени провести на острове в южной части Тихого Океана...

– Так значит, в литературной версии есть доля правды? – тут же перебил его Лобанов.

– Только доля! – быстро ответил Гарин и продолжил начатое, – так там обитали необычные медузы. Небольшие и практически шаровидные. Похожие, насколько я знаю, есть у наших берегов в Японском море, только мои были чуть крупнее: купол почти сферический с радиусом примерно 10 мм, толщина его стенки около 2 мм, и довольно небольшие и тонкие

щупальца. Вы знаете, как они дышат безо всяких специальных органов? По сути, всем телом – кислород диффундирует из морской воды через всю поверхность купола (и снаружи, и изнутри) непосредственно к клеткам, потребляющим кислород. Вот попробуйте, например, на базе моих данных построить кое-какие оценки...

**2.1. («Дыхание медузы», 9 баллов).** Для медузы с указанными размерами оцените равновесную концентрацию кислорода  $\bar{n}$  в ее тканях на основе закона Фика, согласно которому плотность диффузионного потока молекул через слой материала толщины  $d$  пропорционален разности их концентраций  $\Delta n$  по разные стороны от этого слоя:  $j = -D \frac{\Delta n}{d}$ , где величина  $D$  называется коэффициентом диффузии, а знак «минус» указывает направление диффузии (молекулы диффундируют туда, где концентрация меньше). Используйте следующую модель: поверхность купола имеет «кожу» толщиной  $d = 0,2$  мм с коэффициентом диффузии  $D = 3 \cdot 10^{-6}$  см<sup>2</sup>/с, а под ней расположены ткани, клетки которых потребляют кислород, причем коэффициент диффузии этих тканей намного больше, чем у «кожи». Суммарное потребление кислорода этими тканями при нормальной жизнедеятельности медузы составляет  $q = 1,26 \cdot 10^{-10}$  моль/с. Концентрацию растворенного кислорода в морской воде вблизи острова  $n_0 \approx 10^{23}$  молекул/м<sup>3</sup> считайте постоянной, число Авогадро – равным  $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ .

При падении концентрации кислорода в тканях ниже 50 % от  $\bar{n}$  процессы жизнедеятельности у медузы «замирают» (потребление кислорода резко падает), и при длительном пребывании в таком состоянии она может погибнуть. Допустим, что из-за кратковременного воздействия концентрация кислорода упала до 25 % от  $\bar{n}$ . Определите время «замирания» процессов жизнедеятельности после такого воздействия.

### **ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

В установившемся режиме (при равновесной концентрации кислорода в тканях медузы) диффузионный поток молекул через «кожу» точно компенсирует суммарное потребление:

$$q \cdot N_A = \frac{D}{d} \cdot 8\pi R^2 (n_0 - \bar{n}) \Rightarrow \bar{n} = n_0 - \frac{q N_A d}{8\pi D R^2} \approx 0,80 \cdot 10^{23} \text{ молекул/м}^3.$$

Здесь учтено, что полная площадь поверхности купола (снаружи и изнутри) примерно равна  $8\pi R^2$ . При отклонении концентрации вниз от равновесной поток увеличивается, и концентрация постепенно возвращается к равновесной: скорость роста концентрации равна изменению количества молекул, поделенному на объем тканей  $4\pi R^2 H$  (где  $H$  – толщина стенки купола), то есть

$$\frac{dn}{dt} = \frac{1}{4\pi R^2 H} \frac{D}{d} \cdot 8\pi R^2 (n_0 - n) = \frac{2D}{dH} (n_0 - n).$$

Здесь мы учли, что ткани медузы перестали потреблять кислород. Теперь удобнее следить именно за отклонением концентрации от внешней  $\Delta n \equiv n - n_0$ :

$$\frac{d(\Delta n)}{dt} = -\frac{2D}{dH} \cdot \Delta n \equiv -\frac{\Delta n}{\tau} \Rightarrow \Delta n(t) = \Delta n(0) \cdot e^{-t/\tau}.$$

(как видно, мы обозначили  $\tau \equiv \frac{dH}{2D} = \frac{2000}{3}$  с). Если  $\Delta n(0) \approx -0,8n_0$ , то отклонение концентрации уменьшится (по модулю) до  $\Delta n(t) \approx -0,6n_0$  за время

$$t \approx \tau \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 192 \text{ с},$$

то есть примерно 3,2 минуты.

**ОТВЕТЫ:**  $\bar{n} = n_0 - \frac{q N_A d}{8\pi D R^2} \approx 0,80 \cdot 10^{23}$  молекул/м<sup>3</sup>,  $t = \frac{dH}{2D} \cdot \ln(4/3) \approx 192 \text{ с} \approx 3,2$  минуты.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

| №            | действие  | макс. балл |
|--------------|---|------------|
| 1            | Правильно определена равновесная концентрация молекул кислорода в тканях медузы   | 4          |
|              | 1.1 Правильно записано условие баланса молекул кислорода.   | 1          |
|              | 1.2 Получено правильное выражение для $\bar{n}$   | 2          |
|              | 1.3 Найдено численное значение $\bar{n}$ в интервале от $0,78 \cdot 10^{23}$ до $0,82 \cdot 10^{23}$  | 1          |
| 2            | Правильно найдено время «замирания» жизнедеятельности   | 5          |
|              | 2.1 Получено правильное уравнение для скорости изменения концентрации при отклонении от равновесного значения                               | 1          |
|              | 2.2 Найдено правильное решение этого уравнения, эквивалентное $\Delta n(t) = \Delta n(0) \cdot e^{-t/\tau}$ с правильным значением $\tau^*$ | 1+1=2      |
|              | 2.3 Получена правильная формула $t = \tau \cdot \ln(4/3)$ и численное значение в интервале от 180 с до 205 с                                | 1+1=2      |
| <b>ВСЕГО</b> |   | <b>9</b>   |

\*допустимо использование корректной оценочной формулы

– А еще медузы умеют слышать – у них на краях купола есть специальные резонаторы, которые реагируют на инфразвук! – заметил Гарин, - например, «мой» вид четко реагировал на частоту  $\nu = 10$  Гц, и поэтому они слышали «гул бури», то есть инфразвуковое излучение больших волн, которое в океане распространяется почти без затухания на огромные расстояния. Так что они всегда «прятались» при приближении шторма.

– А сами они не могли издавать звуки на этой частоте? – заинтересованно спросил Лобанов.

– Интересный вопрос! – отозвался Гарин, - я думал об этом, но у меня не было возможности изготовить подходящий микрофон. Учитывая их размеры, мощности там очень малые, а, чтобы выделять сигнал на фоне шумов, нужен направленный и достаточно чувствительный микрофон.

– Давайте разберемся: пусть, например, резонаторы каким-то образом «задают такт», и на этой частоте весь купол совершает радиальные движения – какая там может быть амплитуда колебаний звукового давления? – начал рассуждать Лобанов.

- Думаю, не больше 60 Па. Другие параметры я знаю довольно точно: плотность воды там  $1,027 \text{ г/см}^3$ , скорость звука в воде на этой частоте примерно 1460 м/с.

**2.2. («Звучание медузы», 10 баллов)** Найдите примерно мощность звукового излучения, создаваемого медузой. Допустим, что у Вас есть микрофон, у которого площадь плоского входного отверстия  $S_{\text{in}} = 2 \text{ см}^2$ , а порог чувствительности по мощности  $\bar{P} = 0,1 \text{ пВт}$ . С какого максимального расстояния  $r_c$  он «услышит» медузу? В течении какого времени он будет слышать медузу, дрейфующую мимо него с постоянной скоростью  $v = 6 \text{ см/с}$  по прямой, у которой ближайшая к микрофону точка находится точно на оси входного отверстия на расстоянии  $r = \frac{1}{2} r_c$  от него?

**Указание:** Амплитуда звукового давления  $(\delta p)_m$  – максимальное отклонение давления в звуковой волне от его равновесного значения. Интенсивность звуковой волны связана с амплитудой звукового давления соотношением  $I = \frac{[(\delta p)_m]^2}{2\rho_0 c}$ , где  $\rho_0$  – равновесная плотность среды, а  $c$  – скорость распространения звуковой волны.

**ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:**

В соответствии с указанием из условия, интенсивность излучения медузы

$$I_0 = \frac{[(\delta p)_m]^2}{2\rho_0 c} \approx 0,0012 \text{ Вт/м}^2.$$

Понятно, что для нахождения мощности нужно умножить эту величину на внешнюю площадь поверхности купола, и поэтому  $P = I_0 \cdot 4\pi R^2 \approx 1,5$  мкВт.

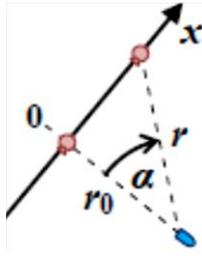
Мы знаем, что затуханием изучаемого звука можно пренебречь, и поэтому по мере удаления от медузы его интенсивность убывает только из-за распределения энергии излучения по увеличивающейся площади поверхности фронта волны. Значит, на расстоянии  $r$  от медузы

$$I(r) = I_0 \cdot \frac{R^2}{r^2},$$

и максимальное расстояние «слышимости» определяется из условия

$$I_0 \cdot \frac{R^2}{r_c^2} S_{in} = \bar{P} \Rightarrow r_c = R \sqrt{\frac{I_0 S_{in}}{\bar{P}}} \approx 15,5 \text{ м.}$$

При движении медузы изменяется расстояние между ней и входным отверстием микрофона, и,



кроме того, изменяется угол падения  $\alpha$  звука от медузы на плоскость входного отверстия. Ясно, что этот угол тоже влияет на мощность звукового сигнала, принимаемого микрофоном (например, при  $\alpha = 90^\circ$  энергия излучения уже не попадает в микрофон). С учетом обоих факторов принимаемая микрофоном мощность звука  $P = S_{in} I_0 \cdot \frac{R^2}{r^2} \cdot \cos(\alpha)$ . Направим ось  $x$  вдоль линии дрейфа медузы, совместив начало отсчета координаты с точкой наибольшего сближения медузы с микрофоном (см. рисунок). Тогда

$$P(x) = \bar{P} \frac{r_c^2 r_0}{r^2 r} = 4\bar{P} \left[ 1 + \left( \frac{2x}{r_c} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

Здесь мы учли, что  $r_0 = \frac{1}{2} r_c$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{r_0}{r}$  и  $r = \sqrt{r_0^2 + x^2}$ . Таким образом, интервал значений координаты медузы, при которых микрофон ее слышит – это  $|x| \leq x_m$ , где

$$P(x_m) = \bar{P} \Rightarrow \left[ 1 + \left( \frac{2x_m}{r_c} \right)^2 \right]^{3/2} = 4 \Rightarrow 2x_m = r_c \sqrt{4^{2/3} - 1}.$$

Продолжительность интервала времени, в течение которого микрофон слышит медузу

$$\Delta t = \frac{2x_m}{v} = \frac{r_c}{v} \sqrt{4^{2/3} - 1} \approx 1,233 \frac{r_c}{v} \approx 318 \text{ с.}$$

**ОТВЕТЫ:**  $P = \frac{[(\delta p)_m]^2}{2\rho_0 c} \cdot 4\pi R^2 \approx 1,5$  мкВт,  $r_c = R \sqrt{\frac{I_0 S_{in}}{\bar{P}}} \approx 15,5$  м,  $\Delta t = \frac{r_c}{v} \sqrt{4^{2/3} - 1} \approx 318$  с.

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

| № | действие  | макс. балл |
|---|---|------------|
| 1 | Правильно найдена мощность звучания медузы (формула и численный ответ)<br>$P = I_0 \cdot 4\pi R^2 \approx 1,5$ мкВт                       | 1+1=2      |
| 2 | Правильно определено максимальное расстояние слышимости   | 3          |
|   | 2.1 Указано и обосновано, что интенсивность звука в отсутствие затухания убывает обратно пропорционально квадрату расстояния.             | 1+1=2      |
|   | 2.2 Получена оценка $r_c$ в интервале от 15 до 16 метров.   | 1          |
| 3 | Правильно найдена длительность интервала слышимости   | 5          |
|   | 3.1 Правильно учтено влияние изменения расстояния между медузой и микрофоном и изменение угла $\alpha$ на мощность принимаемого сигнала   | 1+1=2      |
|   | 3.2 Получена правильная формула для интервала значений координаты медузы, при которых микрофон ее слышит: $2x_m = r_c \sqrt{4^{2/3} - 1}$ | 2          |
|   | 3.3 Получен числовой ответ для $\Delta t$ в интервале от 314 до 322 с   | 1          |
|   | <b>ВСЕГО</b>  | <b>10</b>  |

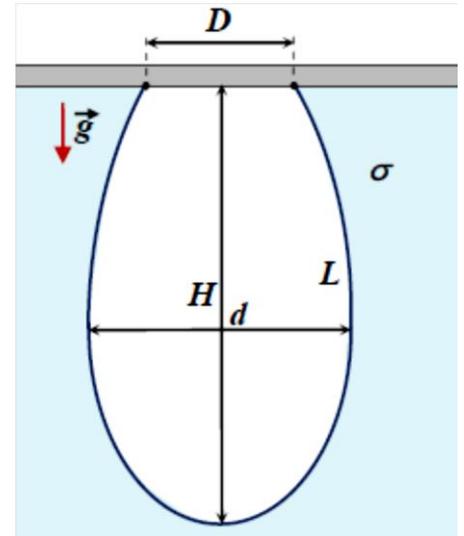
– А Вы можете сделать устойчивое отверстие в мыльной пленке? – спросил однажды Гарин во время чаепития.

– Ну, разве что с помощью легкой ниточки... Сама по себе граница отверстия не будет устойчива.

– Верно. А какова будет его форма?

– Ну, если действием силы тяжести на пленку и ниточку пренебречь, то граница будет дугой окружности.

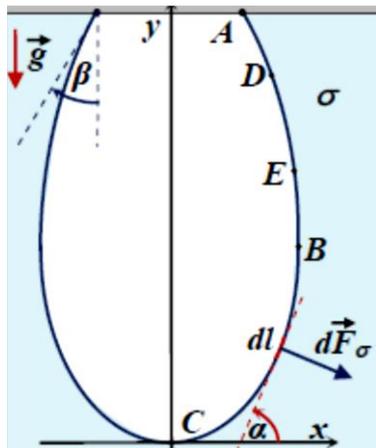
– А если массой ниточки пренебрегать будет нельзя – например, если линейные плотности сил тяжести и поверхностного натяжения будут равны? Давайте-ка для интереса посчитаем!



**3. («Отверстие в мыльной пленке», 20 баллов)** На достаточно большом (размер в любом направлении более метра) плоском каркасе, установленном вертикально, создана пленка из мыльного раствора. К горизонтальной верхней стороне его рамки на расстоянии  $D = 9$  см друг от друга прикреплены концы практически нерастяжимой тонкой нити длиной  $L = 63$  см. Нить «приклеилась» к пленке, и после этого пленку внутри нити аккуратно прокололи так, что «снаружи» от нити, между ней и каркасом, пленка уцелела. В результате пленка растянула нить, а внутри нити получилось «отверстие в пленке» (см. рисунок). Известно, что масса нити и коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора удовлетворяют соотношению  $\sigma = \frac{mg}{2L}$ . Чему равны максимальные размеры отверстия на вертикали и горизонтали ( $H$  и  $d$ )? Масса пленки пренебрежимо мала.

### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Каждый участок нити находится в равновесии под действием силы тяжести (направленной вниз), силы поверхностного натяжения (направлена перпендикулярно нити в каждой точке) и сил натяжения нити на концах этого участка (направлены по касательной к нити).



Введем систему координат: ось  $x$  направим горизонтально, ось  $y$  – вертикально, а начало координат совместим с нижней точкой нити. Для начала обратим внимание, что проекции силы натяжения, действующей на бесконечно малый участок нити длиной  $dl$ , касательная к которому составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$ , равны (см. рисунок)  $dF_{\sigma x} = 2\sigma \cdot dl \cdot \sin(\alpha) = 2\sigma \cdot dy$  и  $dF_{\sigma y} = -2\sigma \cdot dl \cdot \cos(\alpha) = -2\sigma \cdot dx$ . Множитель «2» появился из-за того, что наша пленка – двусторонняя. Значит, проекция силы поверхностного натяжения на некоторую выбранную ось пропорциональна проекции участка на ось, перпендикулярную выбранной.

Если мы выделим теперь произвольный (не малый) участок нити (например,  $DE$ ), то, суммируя вклады его бесконечно малых участков, получим:

$$F_{\sigma x}^{DE} = \sum_E^D dF_{\sigma x} = 2\sigma \sum_E^D dy = 2\sigma(y_D - y_E),$$

$$F_{\sigma y}^{DE} = \sum_E^D dF_{\sigma y} = -2\sigma \sum_E^D dx = 2\sigma(x_E - x_D),$$

Еще одно важное соотношение для любого отрезка нити можно получить из принципа Мопертюи (виртуальных перемещений). Так как отрезок находится в равновесии, то суммарная работа действующих на него сил на бесконечно малом «виртуальном»

перемещении из этого положения равна нулю. Можно рассмотреть перемещение участка  $DE$  на расстояние  $ds$  «вдоль нити». Сила поверхностного натяжения на этом перемещении работы не совершает, а работу силы тяжести можно посчитать через изменение потенциальной энергии участка в поле тяжести (наше перемещение эквивалентно переносу «кусочка» веревки с массой  $dm = \frac{m}{L} dl$  от одного конца участка к другому). Таким образом:

$$T_D \cdot ds - T_E \cdot ds + dm \cdot g(y_E - y_D) = 0 \Rightarrow T_D = T_E + \frac{mg}{L}(y_D - y_E).$$

Сила натяжения нити растет снизу вверх, причем ее изменение определяется только силами тяжести, а кривизна нити зависит и от сил поверхностного натяжения.

Запишем условия равновесия для участка  $AC$  и учтем связь  $\sigma$  с силой тяжести и соотношение известных размеров (обозначения показаны на рисунке):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_A \cdot \cos(\beta) = \frac{mg}{2} + \sigma D = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{D}{L}\right) = \frac{4}{7} mg \\ T_A \cdot \sin(\beta) + T_C = 2\sigma H = mg \frac{H}{L} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_A \cdot \cos(\beta) = \frac{4}{7} \\ z_A \cdot \sin(\beta) + z_C = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right.$$

Здесь введены удобные безразмерные  $z \equiv T/mg$  и  $\lambda \equiv L/H$ . Формула для изменения силы натяжения в этих переменных дает  $z_A - z_C = \frac{1}{\lambda}$ . Теперь мы можем  $z$  и  $\beta$  выразить через  $\lambda$ :

$$z_C = \frac{4\lambda}{49}, \quad z_A = \frac{1}{\lambda} + \frac{4\lambda}{49}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \arctg\left(\frac{2\lambda}{7}\right).$$

Нам нужно еще одно независимое уравнение, и для его получения запишем для участка нити от произвольной точки «правой» половины (с координатами  $x$  и  $y$ ) до  $C$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_x = T \cdot \cos(\alpha) = T_C - 2\sigma y = \frac{mg}{L}(Lz_C - y) \\ T = T_C + \frac{mg}{L}y = \frac{mg}{L}(Lz_C + y) \end{array} \right\} \Rightarrow T[1 + \cos(\alpha)] = 2z_C mg = \frac{8\lambda}{49} mg.$$

С другой стороны, для малого элемента нити на верхнем конце этого отрезка

$$dT_y = m \frac{dl}{L} g + 2\sigma \cdot dx = \frac{mg}{L} \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} dy.$$

Поэтому, используя предыдущее выражение, мы можем получить :

$$T_y dT_y = T \sin(\alpha) \frac{mg}{L} \frac{1 + \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} dy = \frac{mg}{L} dy \frac{8\lambda}{49} mg = (mg)^2 \frac{8\lambda}{49} d\left(\frac{y}{L}\right).$$

Интегрирование этого выражения выполняется легко и дает

$$T_y^2 = (mg)^2 \frac{16\lambda y}{49 L}.$$

Значит,

$$\left\{ \begin{array}{l} T_y = T \cdot \sin(\alpha) = \frac{4}{7} mg \sqrt{\frac{\lambda y}{L}} \\ T_x = T \cdot \cos(\alpha) = mg \left(\frac{4\lambda}{49} - \frac{y}{L}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{28\sqrt{\lambda Ly}}{4\lambda L - 49y} \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{7} \sqrt{\frac{\lambda L}{y}} - \frac{49}{28} \sqrt{\frac{y}{\lambda L}}\right) dy.$$

И это интегрирование не очень сложное, так что мы получаем уравнение, определяющее форму нити:  $x(y) = \frac{2}{7} \sqrt{\lambda Ly} - \frac{49}{42} \frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda L}}$ . Подставив в него координаты точки  $A$ , находим неизвестный параметр  $\lambda$ :

$$\frac{D}{2} = \frac{2}{7} L - \frac{49}{42\lambda^2} L \Rightarrow \frac{D}{2L} = \frac{1}{14} = \frac{2}{7} - \frac{49}{42\lambda^2} \Rightarrow \lambda = \frac{7}{3}.$$

Итак,  $H = \frac{3}{7} L = 27$  см, а уравнение нити  $x(y) = L \left[ \sqrt{\frac{4y}{21L}} - \frac{3}{14} \left(\frac{7y}{3L}\right)^{3/2} \right]$ . Ясно, что максимум

этого выражения достигается в точке  $y_0 = \frac{4}{21} L$  и равен  $\frac{d}{2}$ . После подстановки получаем, что

$$d = \frac{16}{63} L = 16 \text{ см.}$$

**ОТВЕТЫ:**  $H = \frac{3}{7}L = 27$  см,  $d = \frac{16}{63}L = 16$  см.

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:**

| №            | действие  | макс. балл |
|--------------|---|------------|
| 1            | Получение правильных уравнений связи между геометрическими параметрами, характеризующими форму нити   | <b>12</b>  |
|              | 1.1   Используется правильный способ вычисления обеих компонент силы поверхностного натяжения, действующей на участок нити  | 1+1=2      |
|              | 1.2   Правильно записана система из двух уравнений равновесия участка нити $AB$ или $BC$  | 1+1=2      |
|              | 1.3   Получено выражение для изменения величины силы натяжения нити, эквивалентное $T_D = T_E + \frac{mg}{L}(y_D - y_E)$  | 3          |
|              | 1.4   Получено еще одно независимое уравнение для компоненты силы натяжения нити (например, $T_y = T \cdot \sin(\alpha) = \frac{4}{7}mg\sqrt{\frac{\lambda y}{L}}$ )        | 3          |
|              | 1.5   Из этих уравнений получено дифференциальное уравнение, однозначно определяющее форму нити (например, $\frac{dy}{dx} = \frac{28\sqrt{\lambda Ly}}{4\lambda L - 49y}$ ) | 2          |
| 2            | Правильно вычислены $H$ и $d$   | <b>8</b>   |
|              | 2.1   Получено правильное алгебраическое уравнение, описывающее форму нити (уравнение нити или полная система уравнений связи $H$ и $d$ с $D$ и $L$ )                       | 4          |
|              | 2.2   Получен правильный числовой ответ $H = 27$ см   | 2          |
|              | 2.3   Получен правильный числовой ответ $d = 16$ см   | 2          |
| <b>ВСЕГО</b> |   | <b>20</b>  |

Во время очередной встречи инженеров Лобанов предложил:

- А давайте сходим куда-нибудь вместе? Нельзя же все время сидеть в лаборатории.
- Можно все время работать в лаборатории! – отвечал Гарин.
- Например, на хоккей. Сегодня очень интересный матч.
- Хорошо, давайте попробуем.

После матча инженеры снова вернулись в лабораторию, но еще некоторое время обсуждали хоккей.

– В мое время в эту игру играли мячом – начал обсуждение Гарин, – и мне кажется, что движение мяча по льду более сложное, чем у шайбы, и удар даже при скользящем ударе требует большего искусства.

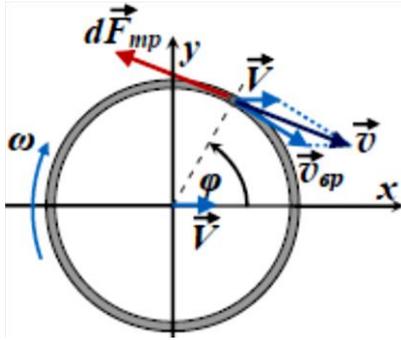
– Но шайба тоже может вращаться! – возразил Лобанов. – И это влияет на ее скольжение по льду. Вот давайте сравним..

**4. («Дальний удар», 20 баллов)** Для упрощения вместо шайбы рассмотрите тонкостенное цилиндрическое кольцо радиуса  $R$ . Исследуйте движение этого кольца по горизонтальному льду. Кольцо стартует каждый раз с одной и той же скоростью движения центра масс  $v_0$ , но с разными начальными угловыми скоростями вращения  $\omega_0$ . Вам нужно исследовать влияние вращения на дальность скольжения. Пусть при старте без вращения тормозной путь кольца равен  $s_0$ . Найдите тормозной путь кольца для трех ситуаций:  $\omega_0 R \ll v_0$ ,  $\omega_0 R = v_0$  и  $\omega_0 R \gg v_0$ . Используйте следующие предположения:

- Кольцо не отрывается от льда, трение между кольцом и льдом является сухим трением (лед не плавится) и подчиняется закону Кулона-Амонтона.
- Силы нормальной реакции льда равномерно распределены по площади опоры кольца и не зависят от движения кольца.

### ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим момент времени, в который центр кольца движется со скоростью  $V$ , и при этом



кольцо вращается вокруг центра с угловой скоростью  $\omega$ . Выделим малый (с угловым размером  $d\varphi$ ) элемент кольца, направление на который от центра кольца в этот момент времени составляет угол  $\varphi$  с  $\vec{V}$ . В системе координат, показанной на рисунке, скорость этого элемента относительно поверхности равна

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_{\text{вр}} \Rightarrow \begin{cases} v_x = V + \omega R \cdot \sin(\varphi) \\ v_y = -\omega R \cdot \cos(\varphi) \end{cases}.$$

Сила трения скольжения, действующая на этот участок, направлена против  $\vec{v}$ , а ее модуль пропорционален модулю силы нормальной реакции. С учетом заданных приближений (равномерности нагрузки и характера силы трения) ясно, что

$$d\vec{F}_{mp} = -\mu mg \frac{\vec{v}}{v} \Rightarrow \begin{cases} F_{mpx} = -\frac{\mu mg}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \varepsilon \cdot \sin(\varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \sin(\varphi)}} d\varphi \\ F_{mpy} = +\frac{\mu mg}{2\pi} \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \sin(\varphi)}} d\varphi \end{cases},$$

где  $\varepsilon \equiv \omega R/V$ . Сразу обратим внимание, что из-за симметрии последнего интеграла (его можно разбить на два слагаемых одинаковой величины и противоположного знака)  $F_{mpy} = 0$  при любом соотношении угловой скорости кольца и скорости центра масс. Значит, сила трения и при вращении кольца направлена против скорости центра масс, и центр масс движется по прямой, причем его скорость уменьшается. Но в формуле для  $F_{mpx}$  интеграл в общем случае получается слишком сложным для «школьного» анализа.

Для анализа вращения кольца необходимо вычислить момент сил трения относительно центра кольца. Этот момент является тормозящим, то есть, если считать начальную угловую скорость положительной, то

$$M_{mp} = -\frac{\mu mg R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi) + \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cdot \sin(\varphi)}} d\varphi.$$

Перейдем к исследованию заданных режимов.

(I)  $\omega_0 R \ll v_0$ : В этом случае  $\varepsilon \ll 1$ , и в интегралах можно ограничиться основным слагаемым, то есть ненулевым слагаемым самой низкой степени по  $\varepsilon$ . В выражении для силы таким слагаемым является слагаемое с  $\varepsilon^0$ , то есть  $F_{mpx} \approx -\mu mg$ , и вращение мало влияет на дальность скольжения. Можно сделать вполне разумный вывод, что тормозной путь примерно равен  $s_0$ . Однако в этом случае, строго говоря, нужно проанализировать корректность приближения (то есть проверить, что практически в ходе всего торможения используемое приближение  $\varepsilon \ll 1$  работает). А для этого нужно вычислить момент. Тогда мы замечаем, что в порядке  $\varepsilon^0$  момент равен нулю, и «нижнее исчезающее» слагаемое отвечает  $\varepsilon^1$ :  $M_{mp} \approx -\frac{\varepsilon}{2} \mu mg R$ . Как видно, угловая скорость вращения убывает медленнее, чем скорость центра:  $v(t) \approx v_0 \left(1 - \frac{\mu g}{v_0} t\right)$ , а  $R\omega(t) \approx R\omega_0 - \frac{R\omega_0}{2v_0} \mu g t = R\omega_0 \left(1 - \frac{\mu g}{2v_0} t\right)$ . Согласно этим формулам, перед остановкой кольца возникает небольшой промежуток времени, когда  $\varepsilon$  перестает быть малым, и наши формулы перестают работать! Впрочем, сама  $V$  в это время очень мала, и поправкой к величине тормозного пути можно пренебречь.

(II)  $\omega_0 R = v_0$ : В этом случае начальное значение  $\varepsilon = 1$ , и тогда в окрестности этого момента времени  $F_{mp\ x} = -\frac{\mu mg}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin(\varphi)} d\varphi = -\frac{\mu mg}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right| d\varphi = -\frac{2\mu mg}{\pi}$ , и при этом аналогичное вычисление дает  $M_{mp} = -\frac{2\mu mg}{\pi} R$ . Как видно, в этом случае  $V$  и  $\omega$  убывают «синхронно», и поэтому  $\varepsilon \equiv 1$  вплоть до остановки шайбы, и полученные формулы тоже действуют вплоть до самой остановки. Ускорение центра шайбы постоянно и равно  $a_x = -2\frac{\mu g}{\pi}$ . Следовательно, тормозной путь при той же начальной скорости увеличивается в  $\pi$  раз:  $s_{II} = \frac{\pi}{2} \cdot s_0$ . Одновременно мы дополнительно обосновали вывод, что в случае (I) появление в конце движения фазы, на которой  $\omega_0 R \approx v_0$ , не приводит к заметному искажению в ответе: действительно, в том случае вращение удлиняет скольжение, но эта фаза движения возникает уже при малых скоростях, и даже с учетом удлинения этой фазы движения, поправка к пройденному пути остается малой.

(III)  $\omega_0 R \gg v_0$ : Здесь  $\varepsilon \gg 1$ , и теперь  $F_{mp\ x} \approx -\frac{1}{2\varepsilon} \mu mg$ , а  $M_{mp} \approx -\mu mg R$ . Теперь скорость кольца убывает гораздо медленнее:  $v(t) \approx v_0 \left(1 - \frac{\mu g}{2R\omega_0} t\right)$ , и  $R\omega(t) \approx R\omega_0 \left(1 - \frac{\mu g}{R\omega_0} t\right)$ . Как видно, здесь тоже, как и в случае (I) возникает ситуация, когда условие  $\varepsilon \gg 1$ , которое было использовано при расчетах, нарушается. Это происходит при  $t \approx \frac{R\omega_0}{\mu g}$ , и до этого кольцо проходит путь, примерно равный  $s_{III} \approx \frac{3R\omega_0 v_0}{4\mu g} = \frac{3R\omega_0}{4v_0} s_0 \gg s_0$ , а после этого (когда уже  $\varepsilon$  порядка 1) – путь, по порядку величины близкий к  $s_0$ . Этой добавкой можно пренебречь.

**ОТВЕТЫ:** при  $\omega_0 R \ll v_0$   $s_I \approx s_0$ , при  $\omega_0 R = v_0$   $s_{II} = \frac{\pi}{2} \cdot s_0$ , при  $\omega_0 R \gg v_0$   $s_{III} \approx \frac{3R\omega_0}{4v_0} s_0 \gg s_0$ .

### КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

| №  | действие  | макс. балл |
|--|---|------------|
| 1  | Определение скоростей элементов кольца относительно поверхности.  | 3          |
|  | 1.1   Есть идея разбиения кольца на малые элементы для вычисления силы трения                             | 1          |
|  | 1.2   Правильно определены обе компоненты скорости произвольного элемента кольца относительно поверхности | 1+1=2      |
| 2  | Построение модельных формул для силы трения и момента сил трения.   | 5          |
|  | 2.1   Показано, что $F_{mp\ y} = 0$   | 1          |
|  | 2.2   Правильно построена (без выполнения интегрирования) модельная формула для $F_{mp\ x}$               | 2          |
| 2.3   Правильно построена (без выполнения интегрирования) модельная формула для $M_{mp}$ | 2   |            |
| 3  | Получение правильных ответов для тормозного пути в разных режимах   | 12         |
|  | 3.1   Для всех режимов правильно изучено поведение $\varepsilon$  | 1+1+1=3    |
|  | 3.2   Доказано, что $s_I \approx s_0$   | 3          |
|  | 3.3   Доказано, что $s_{II} = (\pi/2) \cdot s_0$  | 3          |
| 3.4   Доказано, что $s_{III} \approx \frac{3R\omega_0}{4v_0} s_0 \gg s_0$                | 3   |            |
| <b>ВСЕГО</b>   |   | <b>20</b>  |

**Максимальная оценка за часть II: 75 баллов.**