ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!» ПО ФИЗИКЕ.

2025/26 учебный год, ЗАДАНИЕ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА. 7, 8 и 9 классы.

ЗАДАНИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ.

Часть I (проверялись только ответы).
Пример варианта (численные данные варьировались):

Вопрос 1 (8 баллов):
Ветка, соединяющая станции Алексеево и Васильево, одноколейная, и все станции на ней расположены строго на одинаковых расстояниях друг от друга. По этой ветке курсирует беспилотный электропоезд, который всегда едет с одной и той же скоростью, и делает на всех станциях (включая конечные) остановки одинаковой длительности. Два приятеля живут рядом со станциями Колино и Мишино, расположенными на этой ветке неподалеку (между ними есть еще одна станция). Во время поездок в гости они узнали, что от отправления поезда от станции Колино до отправления его со станции Мишино проходит ровно 9 минут. После наблюдений за поездом они дополнительно узнали, что от отправления поезда от Колино в сторону Алексеево до отправления от Колино в сторону Васильево проходит в 3 раза меньше времени, чем от отправления от Колино в сторону Васильево до отправления от Колино в сторону Алексеево. На станции Мишино это отношение интервалов между отправлениями в разные стороны равно 1,4. Сколько времени проходит от отправления поезда от Алексеево до его отправления из Васильево? Ответ запишите в минутах.

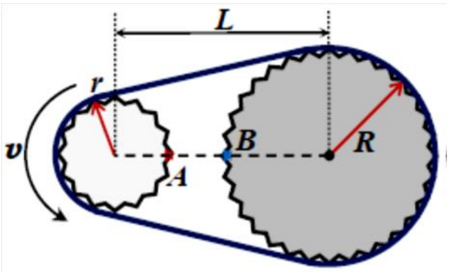
ОТВЕТ: 54.

КОММЕНТАРИЙ: Пусть всего на ветке N станций. Занумеруем все станции, начиная с Алексеево (1,2,…). Пусть номер станции Колино k. Тогда номер станции Мишино $m = k + 2$. Из условия ясно, что от отправления от любой станции до отправления со следующей походит время t = 4,5 минуты. Запишем условия, связанные с отношением времен. Поскольку время пропорционально числу интервалов между станциями, то

$$\left\{\begin{aligned} 3 &= \frac{N-k}{k-1} \\ 1{,}4 &= \frac{N-k-2}{k+1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} N &= 4k-3 \\ 5N &= 12k+17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} k &= 4 \\ N &= 13 \end{aligned}\right..$$

Искомое время $T = (N-1)t = 12t = 54$ минуты.

Вопрос 2 (10 баллов):
Две шестеренки – ведущая, радиусом r = 10 см, и ведомая, радиусом R = 25 см, вращаются, соединенные нерастяжимой цепью. Расстояние между осями шестеренок L = 39 см. На зубчиках шестеренок поставлены две метки – A и B. В некоторый момент времени эти метки оказались на минимальном расстоянии друг от друга (см. рисунок). Найдите величину скорости метки B относительно метки A в этот момент времени. Известно, что величина линейной скорости звеньев цепи постоянна и равна 0,8 м/с. Ответ укажите в м/с с точностью до сотых.



ОТВЕТ: 1,92.

КОММЕНТАРИЙ: Система отсчета, связанная с меткой А – это СО, связанная с малой шестеренкой, вращающейся с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{r}$. Поэтому точка, которая бы совпадала по положению с меткой В и покоилась бы относительно А, двигалась бы относительно неподвижной СО «вверх» со скоростью $v'_B = \omega(L-R) = \frac{L-R}{r}v$. Сама метка В относительно неподвижной СО движется «вниз» со скоростью v (ясно, что линейные скорости зубчиков шестеренок равны линейной скорости звеньев цепи). Поэтому искомая скорость $v_{BA} = v'_B + v = \frac{L-R+r}{r} v = 1{,}92$ м/с.

Вопрос 3 (7 баллов):
Пусть у нас есть кубик с ребром 2 см из неизвестного сплава, цилиндрический диск из дерева неизвестной породы с площадью поперечного сечения 360 см^2 и таз с водой. Оказалось, что диск плавает на поверхности воды в тазу так, что его верхняя плоскость горизонтальна, и он выступает из воды на 12 мм. Когда в центр диска был поставлен наш кубик, высота выступающей над водой части диска уменьшилась до 9 мм. Определите плотность сплава, из которого сделан кубик. Плотность воды равна 1 г/см^3. Ответ запишите в г/см^3, с точностью до десятых.

ОТВЕТ: 13,5.

КОММЕНТАРИЙ: Пока диск плавал без кубика, действующая на него сила тяжести уравновешивалась силой Архимеда. Поэтому $M = \rho S(H - h)$, где M – масса диска, H – его высота, а ρ – плотность воды. После постановки кубика $M + m = \rho S(H - h'),$ Разность этих равенств дает: $m = \rho S(h - h') = 108$ г. Объем кубика 8 см^3. Таким образом, его плотность равна $\rho_c = \frac{m}{V} = 13{,}5$ г/ см^3.

Часть II (проверялись решения).

1. («Гонка по кругу», 15 баллов): Трое школьников решили пробежать по круговой дорожке на стадионе. Сначала стартовал самый медленный участник, через некоторое ненулевое время стартовал средний (по скорости) участник, и после него через такое же время стартовал самый быстрый. Они договорились, что самый медленный участник пробежит целый круг, а двое других останавливаются на финише, но не раньше самого медленного. В итоге оказалось, что скорость среднего была в два раза больше скорости медленного, и в два раза меньше скорости быстрого, и при этом быстрый и медленный финишировали одновременно. После финиша они подсчитали все произошедшие обгоны (одновременное прибытие на финиш в момент окончательной остановки не считается обгоном) и обнаружили, что их число оказалось максимально возможным (для данного соотношения скоростей и очередности прибытия на финиш). Сколько же было обгонов в этом забеге? Какую часть круга пробежал в этом забеге средний участник после финиша быстрого и медленного?

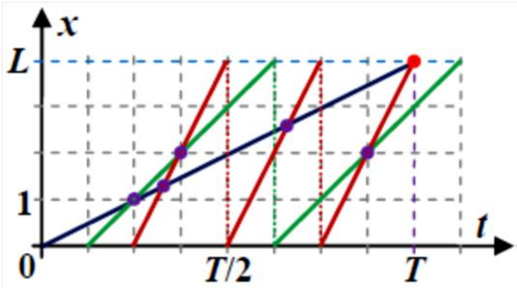
ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

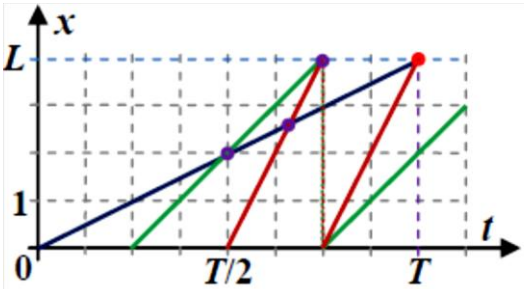
При фиксированном соотношении скоростей и очередности прибытия участников гонки на финиш (медленный и быстрый одновременно, а средний позже) разные возможные варианты происходящего отличались «временем задержки» τ среднего относительно медленного (время задержки быстрого относительно среднего такое же). Потому начнем с того, что выясним, чему может равняться это время. Пусть T – время, за которое пробегал круг медленный участник. Ясно, что быстрый пробегал этот круг за время $T/4$. Поскольку финишировали они одновременно, а быстрый стартовал на 2τ позже, то

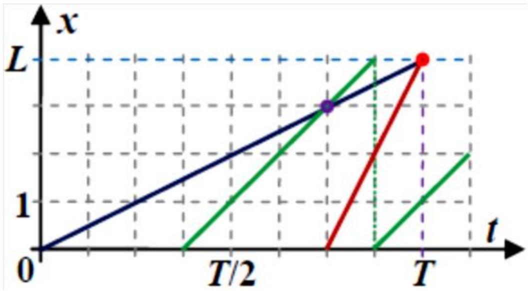
$$2\tau + n \cdot \frac{T}{4} = T,$$

где n – целое число (это число полных кругов, которые быстрый участник успел пробежать до финиша). Это число точно не меньше 1 (участник добежал до финиша) и меньше 4 (на 4 и более круга этот участник потратил бы время более T, так как задержка по условию была).

Так что возможные варианты – это n = 1, 2, 3. Для каждого случая мы можем определить соответствующее τ, так что есть три варианта, отвечающие $\tau = \frac{T}{8}$, $\tau = \frac{T}{4}$ и $\tau = \frac{3T}{8}$. Для выбора варианта, удовлетворяющего последнему условию (то, что число обгонов наибольшее), удобно воспользоваться графическим методом, то есть вести на дорожке координату x, отсчитываемую от старта, и построить графики зависимости координат участников от времени. Это позволит подсчитать число обгонов. Например, для $\tau = \frac{T}{8}$ получаем следующий график (синяя линия – график для медленного участника, зеленая – среднего, красная – быстрого). Фиолетовыми «кружками» обозначены моменты обгонов, красным – момент финиша быстрого и медленного участников. Как видно, здесь всего происходит 5 обгонов. Аналогичные графики для двух других вариантов показывают, что для них число обгонов меньше (в принципе, интуитивно понятно, что увеличение времени задержки приведет к уменьшению числа обгонов).







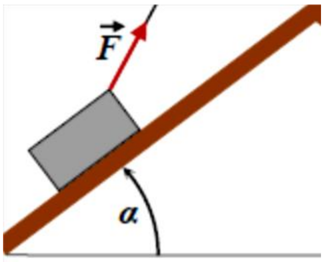
Итак, в этой гонке всего произошло 5 обгонов. Из графика также видно, что в момент финиша быстрого и медленного участников координата среднего составляла ¾ от длины круга. Значит, он после этого финиша пробежал ¼ часть круга.

ОТВЕТЫ: В этой гонке всего произошло 5 обгонов. После финиша быстрого и медленного участников средний пробежал ¼ часть круга.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№		действие	макс. балл
1	Правильно определено количество обгонов.		**10**
	1.1	Составлено правильное уравнение на τ, следующее из одновременности финиша быстрого и медленного участников	1
	1.2	Правильно определены все возможные значения τ	3×1=3
	1.3	Записаны уравнения или построены графики, позволяющие определить число обгонов для каждого варианта	3×1=3
	1.4	Правильно выбрано значение τ, для которого число обгонов максимально	1
	1.5	Найдено, что число обгонов равно 5	2
2	Правильно определена часть круга, которую пробежал средний участник после финиша быстрого и медленного		**5**
	2.1	Составлено необходимое уравнение для определения искомой величины или график построен так, что ее можно определить	2
	2.2	Дан правильный ответ (1/4)	3
	ВСЕГО		**15**

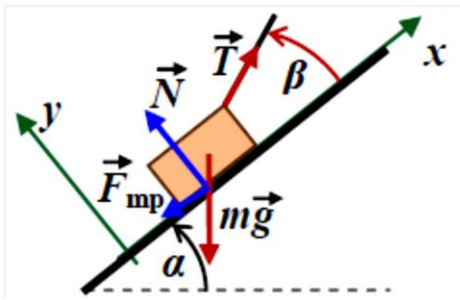
2. («Обрыв на минимальной силе», 22 балла): Однородный брусок с высотой $h = 10$ см и квадратным основанием $d \times d$, где $d = 10$ см, затаскивают вверх по плоскости, наклоненной под углом $\alpha = \arcsin(0{,}6) \approx 36{,}87°$ к горизонту, с помощью легкой нити, которую натягивают с постоянной силой F. Известно, что величина силы тяжести, действующей на брусок, равна $mg = 20$ Н, брусок ориентирован так, как показано на рисунке (то есть плоскость его сечения $h \times d$ вертикальна и перпендикулярна наклонной плоскости), нить прикреплена к середине верхнего ребра бруска. Величина и направление силы $\vec{F}$ выбраны так, чтобы брусок скользил плавно и всем основанием сохранял контакт с наклонной плоскостью, а сама величина силы была минимально возможной (при выполнении всех условий). Оказалось, что эта величина силы равна $F_m = 16$ Н. В ходе подъема бруска нить оборвалась. С каким ускорением после этого будет двигаться брусок? Силами сопротивления воздуха пренебречь, ускорение свободного падения считайте примерно равным 10 м/с^2.



Опыт повторяют еще раз – на этот раз берут брусок с той же массой и тем же коэффициентом трения о наклонную плоскость, но имеющий форму кубика $d \times d \times d$. Можно ли будет выполнить те же условия, прикладывая такую же силу $F_m = 16$ Н? Ответ объясните.

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

В первую очередь определим направление нити, то есть величину угла β между этим направлением и наклонной плоскостью. Поскольку брусок скользит плавно, то сумма приложенных к нему сил (сила тяжести, сила нормальной реакции поверхности, сила трения скольжения и сила натяжения нити) равна нулю. Запишем условие баланса сил в проекциях на оси x и y (см. рисунок) и выразим из них величину силы натяжения нити:



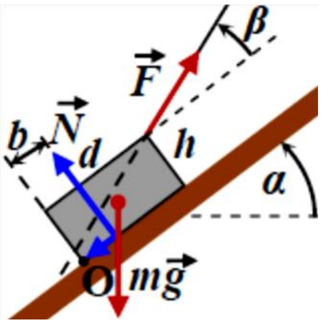
$$\left\{\begin{array}{l} T\cos(\beta) = mg\sin(\alpha) + \mu N \\ N = mg\cos(\alpha) - T\sin(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow T = mg\frac{\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)}{\cos(\beta) + \mu\sin(\beta)}.$$

Если ввести угол $\alpha_0 \equiv \operatorname{arctg}(\mu)$, то это выражение можно записать в виде $T = mg\dfrac{\sin(\alpha + \alpha_0)}{\cos(\beta - \alpha_0)}$, из которого очевидно, что минимум силы натяжения достигается при $\beta = \alpha_0$. Значит, сила, с которой при перемещении бруска тянут за нить, $F = T_{\min} = mg\dfrac{\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)}{\sqrt{1+\mu^2}}$. Для заданного значения α $F = mg\dfrac{3+4\mu}{5\sqrt{1+\mu^2}}$. Таким образом, мы можем определить величину коэффициента трения:

$$5\sqrt{1+\mu^2} = \frac{mg}{F_m}(3+4\mu) = \frac{5}{4}(3+4\mu) \Rightarrow \mu = \frac{7}{24}.$$

При этом $\beta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{7}{24}\right) \approx 16{,}26°$. После обрыва нити ускорения бруска определяется силам тяжести и трения: $ma = mg\cdot\sin(\alpha) - \mu mg\cdot\cos(\alpha) \Rightarrow a = g[\sin(\alpha) - \mu\cdot\cos(\alpha)] = \dfrac{11}{30}g \approx 3{,}67$ м/с^2.

Теперь разберемся, как влияет на возможность изучаемого движения соотношение высоты бруска h и стороны основания d. По условию в процессе подъема брусок всем основанием сохранял контакт с наклонной плоскостью, то есть не вращался. Значит, сумма моментов приложенных к нему сил равнялась нулю. Важно понимать, что при движении бруска по наклонной плоскости точка приложения силы реакции поверхности (перпендикулярными компонентами которой являются N и $F_{\text{тр}}$) смещается именно так, чтобы это требование



выполнялось. Пусть b – расстояние от середины нижнего горизонтального ребра бруска (точка O) до этой точки приложения сил реакции. Из геометрии можно заметить, что плечо силы тяжести относительно горизонтальной оси, проходящей через O (расстояние от этой точки до линии действия силы тяжести) равно $l_g = \frac{d}{2}\cos(\alpha) - \frac{h}{2}\sin(\alpha)$, а плечо силы натяжения нити $l_T = h\cos(\beta) - d\sin(\beta)$. Таким образом, именно условие баланса моментов позволяет определить b:

$$N \cdot b = \frac{mg}{2}[d\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)] + F[h\cos(\beta) - d\sin(\beta)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{2F}{mg}\frac{\sin(\beta)}{\cos(\alpha)}\right) + \frac{h}{2}\left(\frac{2F}{mg}\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} - \operatorname{tg}(\alpha)\right).$$

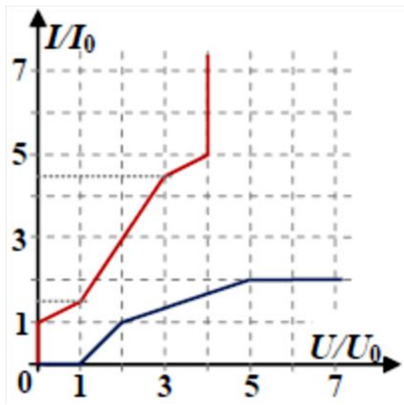
При некоторых значениях параметров системы это выражение может давать нефизические отрицательные значения (точка приложения силы реакции не может быть вне площади опоры), и это означает, что в таком случае невозможно движение бруска без отрыва его плоскости от опоры. Но в нашем случае такого не происходит – при $h = d$ описанное движение возможно. Ясно, что случай кубика – это тот же самый случай.

ОТВЕТЫ: $a = \frac{11}{30}g \approx 3{,}67$ м/с^2 , описанное движение возможно при $h = d$.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Правильно определена величина ускорения после обрыва нити		**15**
	1.1	Правильно записано условие баланса сил	2
	1.2	Найдено правильное выражение для силы натяжения как функция угла β и μ	3
	1.3	Получено правильное выражение для минимального значения силы натяжения как функция μ	4
	1.4	Правильно определено значение $\mu = 7/24$	3
	1.5	Правильно найдена величина ускорения соскальзывания бруска в диапазоне от 4, 3 м/с^2 до 4,4 м/с^2	3
2	Проведен правильный анализ возможности описанного движения		**7**
	2.1	Объяснена связь положения точки приложения силы реакции в площади опоры бруска с моментами внешних сил	2
	2.2	Правильно записано условие баланса моментов сил	3
	2.3	Сделан обоснованный вывод о возможности описанного движения при	2
	ВСЕГО		**22**

3. («ВАХ-ВАХ», 20 баллов): Два *нелинейных элемента* Х1 и Х2 имеют *кусочно-линейные* вольт-амперные характеристики – ВАХ (то есть их графики состоят из отрезков прямых). На графике показаны ВАХ их параллельного (красным) и последовательного (синим) соединений в интервалах значений силы тока и напряжения $\{0 \le I \le 7{,}4 \cdot I_0, 0 \le U \le 7{,}2 \cdot U_0\}$. Постройте ВАХ самих элементов Х1 и Х2. В каких областях значений силы тока и напряжения мы можем это сделать?



ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

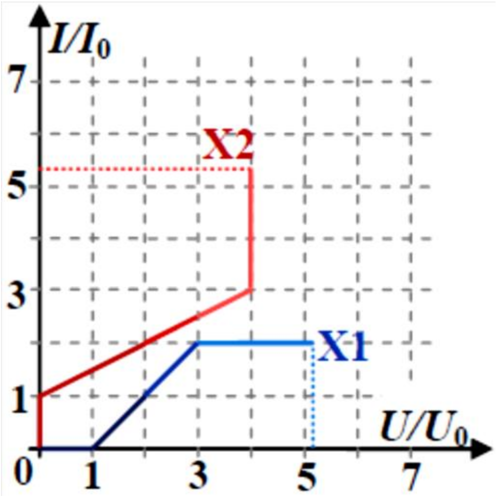
При параллельном соединении напряжения на двух элементах одинаковы, а суммарная сила тока равна сумме сил токов через каждый элемент. Поэтому для получения ВАХ параллельного соединения нужно для каждой пары точек ВАХ элементов при одном значении напряжения получить точку ВАХ параллельного соединения, сложив значения сил токов элементов. Аналогично ВАХ последовательного соединения получается сложением напряжений на элементах при одном значении силы тока. Этот подход можно реализовывать как непосредственно на графике, так и аналитически. Действительно, пусть у нас есть два элемента, для которых на некотором участке значений напряжений и сил токов ВАХ описываются линейными выражениями. Тогда:

$$\begin{Bmatrix} I_1 = a_1 U_1 + b_1 \\ I_2 = a_2 U_2 + b_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_\parallel = (a_1 + a_2) U_\parallel + (b_1 + b_2) \equiv A_\parallel U_\parallel + B_\parallel \\ I_+ = \dfrac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} U_+ + \dfrac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 + a_2} \equiv A_+ U_+ + B_+ \end{array} \right. .$$

Здесь символом «+» обозначено последовательное соединение. Значит, определив по графику коэффициенты линейных ВАХ последовательного и параллельного соединений, можно в соответствующей области значений силы тока и напряжения найти коэффициенты линейных ВАХ самих элементов, решая последовательно системы уравнений

$$\begin{Bmatrix} a_1 + a_2 = A_\parallel \\ \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} = A_+ \end{Bmatrix} \Rightarrow a_{1,2} = \frac{A_\parallel \pm \sqrt{A_\parallel^2 - 4 A_\parallel A_+}}{2} \text{ и } \begin{Bmatrix} b_1 + b_2 = B_\parallel \\ a_2 b_1 + a_1 b_2 = A_\parallel B_+ \end{Bmatrix} \Rightarrow b_{1,2} = \pm \frac{B_+ A_\parallel - a_{1,2} B_\parallel}{\sqrt{A_\parallel^2 - 4 A_\parallel A_+}}.$$

Важное следствие этих вычислений состоит в том, что мы доказали: если на некотором участке значений напряжения (силы тока) ВАХ элементов линейны, ВАХ их параллельного и последовательного и параллельного соединений на соответствующих участках тоже линейны, и наоборот. В данной задаче удобно сразу обратить внимание на то, что <u>один</u> из элементов (далее будем считать его «первым», или Х1) имеет «порог открытия» - при напряжениях менее U_0 он не пропускает ток (это видно на ВАХ последовательного соединения, в то время как на ВАХ параллельного соединения такого порога нет). Значит, в этом диапазоне напряжений ВАХ параллельного соединения – это ВАХ элемента Х2. Тогда мы знаем, что Х2 пропускает токи менее I_0 при практически нулевом напряжении, и поэтому в этой области ВАХ последовательного соединения – это участок ВАХ элемента Х1. Знание этого участка позволят нам достроить ВАХ элемента Х2 до напряжения $2U_0$, вычитая силу тока Х1 из значения для ВАХ параллельного соединения (на рисунке эти «начальные участки ВАХ элементов показаны более темным цветом). Таким образом, можно поэтапно достраивать обе ВАХ. Например, в диапазоне $2U_0 < U < 3U_0$ можно записать уравнения ВАХ соединений $I_+ = \frac{I_0}{3U_0} U_+ + \frac{I_0}{3U_0}$ и $I_\parallel = \frac{3I_0}{2U_0} U_\parallel$, и по формулам, написанным выше, найти уравнения ВАХ элементов: $I_1 = \frac{I_0}{U_0} U_1 - I_0$ и $I_2 = \frac{I_0}{2U_0} U_2 + I_0$. Мы обнаруживаем, что на этом участке они являются продолжениями уже известных нам прямых (чуть более светлые участки). Кроме того, на ВАХ последовательного соединения мы видим, что один из элементов во всей исследованной области напряжений ограничивает ток, не позволяя ему подняться выше $2I_0$. По уже известным участкам мы понимаем, что это может быть только X1, и при этом значении силы тока излом на ВАХ последовательного соединения при напряжении $5U_0$ соответствует напряжению на X1, равном $3U_0$ (и еще $2U_0$ на X2).



Итак, на ВАХ X1 переход в режим стабилизации тока происходит при напряжении $3U_0$ (светлый участок). Мы также видим, что вплоть до суммарного напряжения $7{,}2 \cdot U_0$ ток через X1 остается равным $2I_0$,и поэтому мы знаем поведение ВАХ X1 вплоть до напряжения $7{,}2 \cdot U_0 - 2 \cdot U_0 = 5{,}2 \cdot U_0$. Затем мы просто достраиваем ВАХ X2 по ВАХ параллельного соединения (светлый участок; впрочем, мы могли заметить, что у него есть режим ограничения напряжения и до анализа ВАХ X1). При этом ВАХ элемента X2 по имеющимся данным мы строим в области значений силы тока вплоть до $5{,}4 \cdot I_0$. Итак, мы построили ВАХ элементов.

Нужно понимать, что такая процедура не является, строго говоря, однозначной. Мы должны обратить внимание, что перестановка двух элементов и в последовательном, и в параллельном соединениях не изменит у них связь силы общего тока с общим напряжением. Но можно убедиться, что в данной задаче требование «однозначности» ВАХ (что каждому значению напряжения на обеих ВАХ элементов соответствует одно значение силы тока) исключает другие решения (неоднозначные ВАХ существуют, но для соответствующих элементов устойчивые режимы работы могут зависеть от способа их получения).

ОТВЕТ: На рисунке.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	**действие**		**макс. балл**
1	Описана связь ВАХ элементов с ВАХ их соединений		**6**
	1.1	Связь правильно описана для параллельного соединения	2
	1.2	Связь правильно описана для последовательного соединения	2
	1.3	Описан (используется в решении) способ восстановления линейных ВАХ элементов по ВАХ соединений (аналитический или графический)	2
2	Построение ВАХ нелинейных элементов		**14**
	2.1	Правильно построены начальные участки ($U < 2U_0$) элементов	1+1=2
	2.2	Правильно построены участи ВАХ до перехода в режимы ограничений	2+2=4
	2.3	Правильно показаны точки перехода и прямые для этих режимов	2+2=4
	2.4	Правильно указаны области обоснованного построения ВАХ	2+2=4
	ВСЕГО		**20**

4. («Нагревать или изолировать?», 18 баллов): Пусть склад – это однокомнатное помещение без окон с теплоизолирующими стенками, в котором установлено шесть одинаковых электрических нагревателей. Все нагреватели подключаются параллельно к внешней сети, которую можно при расчетах заменить на один эквивалентный источник постоянного напряжения. Известно, что мощность потока тепла из склада на улицу прямо пропорциональна разности температур (внутри и снаружи склада) и обратно пропорциональна толщине теплоизоляции. Нам необходимо поддерживать на складе температуру не ниже $t_{in} = +24°\text{C}$ при температуре на улице $t_{ex} = -20°\text{C}$. При толщине слоя теплоизоляции d = 36 см и одном включенном нагревателе установившаяся температура на складе равнялась $t_1 = +8{,}8°\text{C}$. При двух включенных нагревателях температура стала равна $t_2 = +20°\text{C}$. При каком минимальном количестве включенных нагревателей температура достигнет нужного значения? Какую максимальную температуру на складе можно обеспечить при такой наружной температуре и этой толщине слоя теплоизоляции? Какой нужно сделать толщину слоя того же теплоизолирующего материала, чтобы необходимая температура достигалась при одном включенном нагревателе?

ВОЗМОЖНОЕ РЕШЕНИЕ:

Рассмотрим n нагревателей, подключенных к внешней сети параллельно. Сила потребляемого тока равна $I = \frac{U_0}{r+R/n}$, где U_0 – ЭДС эквивалентного источника, а r – его внутреннее сопротивление. Общее тепловыделение всех нагревателей возмещает потери тепла через стены:

$$n \cdot \left(\frac{I}{n}\right)^2 R = RU_0^2 \frac{n}{(R+nr)^2} = \alpha \frac{t_n - t_{ex}}{d} \Rightarrow t_n - t_{ex} = \frac{A}{2 + \frac{x}{n} + \frac{n}{x}}.$$

Здесь константа пропорциональности в формуле для мощности потока тепла обозначена α, и также введены обозначения $x \equiv \frac{R}{r}$ и $A \equiv \frac{dU_0^2}{\alpha r}$. Используем заданные значения температур:

$$\left\{\begin{aligned} t_1 - t_{ex} &= 28{,}8°\text{C} = \frac{A}{2 + x + \frac{1}{x}} \\ t_2 - t_{ex} &= 40{,}0°\text{C} = \frac{A}{2 + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1{,}44 = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x + 1}.$$

Из этого соотношения получается квадратное уравнение на x, у которого необходимо выбрать положительный корень: $11x^2 - 28x - 64 = 0 \Rightarrow x = 4$. Подставляя это значение в любую из формул, находим $A = 4{,}5 \cdot 40°\text{C} = 180°\text{C}$. Следовательно, при этой толщине теплоизоляции зависимость установившейся температуры на складе от числа подключенных нагревателей имеет вид

$$t_n = t_{ex} + \frac{180°\text{C}}{2 + \frac{4}{n} + \frac{n}{4}}.$$

Например, при n = 3 и $t_{ex} = -20°\text{C}$ получаем $t_3 \approx 24{,}1°\text{C}$. Как видно, минимальное количество включенных нагревателей, обеспечивающих нужную температуру – это три.

Максимальная температура обеспечивается минимальностью значения величины $\frac{4}{n} + \frac{n}{4}$. Для нахождения нужного n можно рассуждать следующим образом. Из очевидного неравенства $(1-z)^2 \geq 0$ следует, что $1 + z^2 \geq 2z$, то есть $z + \frac{1}{z} \geq 2$. Видно, что равенство достигается при z = 1, то есть именно при этом значении и достигается минимум $z + \frac{1}{z}$. Полагая $z = \frac{n}{2}$, приходим к выводу, что максимальная температура будет достигнута при n = 4, и она будет равна

$$t_{max} = t_{ex} + 45°\text{C} = 25°\text{C}.$$

Интересно: подключение пятого, шестого и т.д нагревателя <u>понизит</u> установившуюся температуру (подумайте, почему)!

Как мы знаем, поток тепла, который будет обеспечиваться одним нагревателем, будет прямо пропорционален разности температур и обратно пропорционален толщине слоя утеплителя.

Таким образом, для достижения поставленной цели толщина должна увеличиться во столько же раз, во сколько нужно увеличить разность температур:

$$d' = d \cdot \frac{(t_{in} - t_{ex})}{(t_1 - t_{ex})} = \frac{55}{36} d = 55 \text{ см}.$$

ОТВЕТЫ: при $n = 3$, $t_{max} = 25℃$, $d' = 55$ см.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

№	действие		макс. балл
1	Правильное определение минимального количества нагревателей		**10**
	1.1	Правильно записано уравнение теплового баланса	2
	1.2	Формула для разности внутренней и наружной температуры правильно записана так, что она содержит две «эмпирические» константы	2
	1.3	Правильно определены обе константы	2+2=4
	1.4	Найдено правильное минимальное число нагревателей $n = 3$	2
2	Правильное определение максимальной температуры, достижимой с помощью подключения нагревателей		**5**
	2.1	Правильно определен максимум зависимости установившейся температуры на складе от числа подключенных нагревателей ($n = 4$)	3
	2.2	Найдено правильное значение $t_{max} = 25℃$	2
3	Правильное определение необходимой толщины теплоизоляции		**3**
	3.1	Указано, что достижения поставленной цели толщина слоя изоляции должна увеличиться во столько же раз, во сколько нужно увеличить разность температур	2
	3.2	Найдено правильное значение $d' = 55$ см	1
	ВСЕГО		**18**

***Максимальная оценка за часть* II: 75 баллов.**