ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2025 года

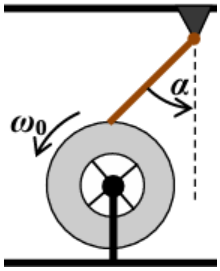
БИЛЕТ № 04 (11 классы): возможные решения и критерии проверки

Теоретические вопросы: нет ответа – **0 баллов**, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – **1 балл**, есть разумные соображения – **2 балла**, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – **3 балла**, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – **4 балла**, полный, правильный и обоснованный ответ – **5 баллов**.

Задание 1:

Вопрос: Однородный цилиндр скатывается без проскальзывания с высоты H в поле тяжести g. Найдите скорость его оси в конце скатывания.

Задача: Вертикальное однородное колесо – полый цилиндр массой M с внешним радиусом R и внутренним $R/2$ (масса спиц и втулки пренебрежимо малы) – может вращаться без трения вокруг закрепленной горизонтальной оси, проходящей через его центр. Его раскрутили до угловой скорости ω_0 в направлении, показанном на рисунке, а затем аккуратно опустили на него конец стержня массой m, подвешенного шарнирно за другой конец. Стержень опирается на верхнюю точку диска, трения в шарнире нет, и в этом положении стержень составляет угол $\alpha = 45°$ с вертикалью. Диск совершил ровно 65 оборотов до полной остановки. Затем опыт повторили, но на этот раз диск раскрутили до той же угловой скорости в противоположном направлении. Сколько оборотов совершит до полной остановки диск на этот раз? Сопротивлением воздуха пренебречь. Коэффициент трения между концом стержня и боковой поверхностью диска $\mu = 0{,}3$.



Ответ на вопрос: При скатывании без проскальзывания работа силы трения равна нулю, и убыль потенциальной энергии цилиндра в поле тяжести равна его приобретенной кинетической энергии. По теореме Кенига кинетическая энергия цилиндра складывается из энергий поступательного и вращательного движений. В отсутствие проскальзывания скорость движения оси цилиндра радиуса R относительно поверхности связана с угловой скоростью его вращения вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, соотношением $v = \omega \cdot R$. Следовательно:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3}{4}mv^2 \Rightarrow v = 2\sqrt{\frac{gH}{3}}$$

Здесь учтено, что момент инерции однородного цилиндра $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Решение задачи: Вращение колеса тормозится силой трения со стороны стержня. Сам стержень при этом находится в равновесии под действием силы тяжести, силы реакции шарнира, силы нормальной реакции колеса и «ответной» силы трения. Последняя до самой остановки является силой трения скольжения, и ее величина равна μN. Обозначим длину стержня L, и для первого опыта запишем для него условие равновесия моментов сил относительно оси шарнира:

$$mg\frac{L}{2}\sin(\alpha) - NL \cdot \sin(\alpha) - \mu NL \cdot \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow F_{тр} = \frac{\mu mg}{2}\frac{\mathrm{tg}(\alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha)+\mu}.$$

Колесо остановится, когда работа этой силы заберет у колеса всю его кинетическую энергию, то есть

$$F_{тр} \cdot 2\pi R \cdot n_1 = \frac{I}{2}\omega_0^2 \Rightarrow n_1 = \frac{I\omega_0^2}{2\pi\mu mgR}\frac{\mathrm{tg}(\alpha)+\mu}{\mathrm{tg}(\alpha)}.$$

Здесь I – момент инерции колеса относительно оси симметрии. Во втором опыте (при изменении направления начального вращения) направления сил трения между колесом и стержнем изменяются на противоположные, и в этих уравнениях изменяется только знак слагаемого с μ. Поэтому в этом случае число оборотов колеса до остановки

$$n_2 = \frac{I\omega_0^2}{2\pi\mu mgR}\frac{\mathrm{tg}(\alpha)-\mu}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)-\mu}{\mathrm{tg}(\alpha)+\mu}n_1 = 35.$$

Ответ: Во втором опыте колесо совершит $n_2 = \frac{\mathrm{tg}(\alpha)-\mu}{\mathrm{tg}(\alpha)+\mu}n_1 = 35$ оборотов.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	указано, что колесо тормозится силой трения о стержень	1
2	указано, что вплоть до остановки это сила трения скольжения	1
3	используются правильные условия равновесия стержня	3

4	правильно описан процесс торможения (записано правильное уравнение ЗСЭ или правильный закон равнозамедленного вращательного движения колеса)	3
5	правильно описаны различия в условиях остановки при разном направлении вращения	2
6	правильно найдена величина силы трения стержня и колеса (через массу, коэффициент трения и угол)	3
7	получено правильное выражение для числа оборотов до остановки в обоих опытах	2×2=4
8	получен правильный аналитический ответ	2
9	получен правильный численный ответ	1
Всего		**20**

Задание 2:

Вопрос: Тонкий стеклянный капилляр опустили в вертикальном положении одним концом в широкий резервуар с жидкостью, почти идеально смачивающей стекло. Уровень жидкости в капилляре оказался на 4 мм выше, чем в остальной части резервуара. Потом точно такой же капилляр (и тоже вертикально) опустили в другой широкий резервуар, в котором находилась жидкость, практически полностью не смачивающая стекло. Коэффициент поверхностного натяжения у этой жидкости в 4 раза больше, чем у первой, а плотность в 8 раз больше. Что будет с уровнем жидкости в капилляре на этот раз?

Задача: Две вертикальные стеклянные пластины, составляющие малый двугранный угол α, опущены в широкий резервуар с полностью смачивающую их жидкостью. Плотность жидкости ρ, коэффициент поверхностного натяжения σ. Найдите высоту подъема жидкости между пластинами над уровнем в резервуаре в зависимости от расстояния x от ребра двугранного угла. Считайте, что $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha\rho g}}$, но много меньше размеров пластин, и при этом сечение поверхности жидкости плоскостью, перпендикулярной биссектрисе двугранного угла, имеет форму дуги окружности.

Ответ на вопрос: В тонкой трубке («капилляре»), действие сил поверхностного натяжения приводит к смещению поверхности жидкости в капилляре по отношению к уровню ее в широкой части сосуда. Высоту подъема жидкости в капилляре можно найти из условия равновесия столба жидкости в капилляре. Например, для капилляра с сечением в виде круга радиуса r:

$$\sigma \cdot 2\pi r\cos\theta = mg = \rho\pi r^2 hg \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}.$$

В первом случае $\theta \approx 0$, и $h = +\frac{2\sigma}{\rho g r}$. Во втором $\theta \approx \pi$, и теперь $h' = -\frac{8\sigma}{8\rho g r} = -\frac{h}{2}$. Таким образом, во втором резервуаре уровень жидкости в капилляре будет на 2 мм ниже, чем в остальной части резервуара.

Решение задачи: Пусть $y(x)$ – профиль «средней линии» поверхности жидкости в «клиновидном» промежутке между пластинами. Так как угол при вершине клина мал, то радиус кривизны этой линии на расстоянии x от ребра двугранного угла значительно больше радиуса кривизны в поперечном сечении, который примерно равен половине расстояния между пластинами (угол смачивания считаем равным нулю, и в соответствии с условием этом сечении профиль поверхности жидкости – половина окружности): $r_\perp \approx x \cdot tg(\alpha/2) \approx \alpha x/2$. Следовательно, лапласовское давление

$$p_Л(x) = -\rho g \cdot y(x) = -\sigma\left[\frac{1}{r_\perp} + \frac{1}{r_\parallel}\right] \approx -\frac{\sigma}{r_\perp} \approx -\frac{2\sigma}{\alpha}\frac{1}{x} \Rightarrow y(x) \approx \frac{2\sigma}{\alpha\rho g}\frac{1}{x}.$$

Таким образом, средняя линия поверхности жидкости в узком клиновидном зазоре близка к гиперболе. Важно понимать, что использованное нами приближение $r_\perp \ll r_\parallel$ означает, что полученная формула справедлива при $y \ll x$, то есть при $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha\rho g}}$.

Ответ: Зависимость высоты подъема жидкости между пластинами над уровнем в резервуаре y в зависимости от расстояния x от ребра двугранного угла $y(x) \approx \frac{2\sigma}{\alpha\rho g}\frac{1}{x}$ при $x \gg \sqrt{\frac{2\sigma}{\alpha\rho g}}$.

Критерии для задачи:

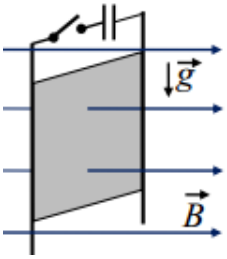
№	**действие**	**балл**
1	явно указано, что угол смачивания равен нулю	1
2	явно указано, что сечение поверхности жидкости плоскостью, перпендикулярной	3

	биссектрисе угла - полуокружность	
3	явно указано, что $r_\perp \ll r_\parallel$	3
4	правильно записано условие баланса давлений под поверхностью жидкости	3
5	правильно найден радиус кривизны поверхности жидкости	2
6	использовано правильное выражение для лапласовского давления	3
7	получено правильное уравнение зависимости $y(x)$	5
Всего		**20**

Задание 3:

Вопрос: К двум точкам металлического кольца радиуса R, находящегося в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле с постоянной скоростью изменения модуля индукции β, подключили идеальный вольтметр. Каковы его показания?

Задача: Квадратная «заслонка» размером $l \times l$ с толщиной d изготовлена из материала с удельным сопротивлением ρ и плотностью τ. Она может скользить без трения по вертикальным направляющим (см. рисунок). Для регулировки величины ускорения заслонки в области ее движения создали горизонтальное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярное поверхности заслонки, а направляющие сверху соединили, используя ключ и конденсатор. Изначально заслонку удерживают, ключ разомкнут. Заслонку отпускают одновременно с замыканием ключа. Параметры и начальное состояние системы подобраны таким образом, чтобы ток зарядки конденсатора после этого был постоянен и равным $I = \frac{\tau l d}{2B} g$, где g – ускорение свободного падения. Определите емкость конденсатора и найдите закон движения заслонки. Сопротивление направляющих и используемых проводов, а также сопротивление контактов ключа намного меньше сопротивления заслонки, ЭДС самоиндукции пренебречь.



Ответ на вопрос: С учетом симметрии системы понятно, что в квазистационарном приближении кольцо можно рассматривать как контур, в котором ЭДС в каждой их двух его частей (по разные стороны от вольтметра) пропорционально длине соответствующего участка кольца. Сила тока в этом контуре равна полной ЭДС, поделенной на полное сопротивление. Поскольку сопротивление каждого из участков тоже пропорционально их длинам, то, в соответствии с законом Ома для участка цепи с ЭДС $U_1 = \mathcal{E}_1 - Ir_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}}{r} r_1 = 0$. Итак, вольтметр покажет нулевое напряжение.

Решение задачи: При замкнутом ключе и движении заслонки будет изменяться площадь контура, содержащего конденсатор и заслонку, что приведет к изменению магнитного потока и появлению в контуре ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$. Здесь ось x направлена вниз, а v – скорость падения заслонки. Будем далее считать «положительным» заряд q конденсатора, создаваемый индукционным током. Тогда ток зарядки конденсатора $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}_i - U_C}{R} = \frac{Blv}{R} - \frac{q}{CR}$ (ясно, что в отсутствие ЭДС индукции заряженный конденсатор будет разряжаться). Как видно из условия, сопротивление контура можно считать равным сопротивлению заслонки $R \approx \rho\frac{l}{ld} = \frac{\rho}{d}$. Поэтому $\frac{dq}{dt} = \frac{Bld}{\rho} v - \frac{d}{\rho C} q$. Исходя из правила Ленца ясно, что сила Ампера, действующая на индукционные токи, текущие через заслонку, должна тормозить ее движение. Кроме того, малость сопротивления направляющих позволяет считать, что ток I распределен в заслонке равномерно по высоте, и $F_{Ax} = -IBl$. Уравнение движения заслонки $m\frac{dv}{dt} = mg - IBl$ с учетом того, что ее масса $m = \tau l^2 d$, приводится к виду $\frac{dv}{dt} = g - \frac{B}{\tau l d}\frac{dq}{dt}$. Согласно условию, от самого начала движения заслонка (которая до этого покоилась) движется с постоянным ускорением, и из этого уравнения находим, что $\frac{dv}{dt} = g - \frac{B}{\tau l d} I = \frac{g}{2}$, то есть $v(t) = \frac{g}{2}t$. Соответствующий закон движения заслонки $x(t) = \frac{g}{4}t^2$. Кроме того, по значению силы тока находим, что $q(t) = q_0 + It = q_0 + \frac{\tau l d g}{2B} t$. При подстановке законов

изменения скорости заслонки и заряда конденсатора в уравнение для силы тока в цепи должно получаться тождество, то есть для любого момента времени

$$\frac{\tau l d g}{2B} = \frac{B l d g}{2\rho} t - \frac{d}{\rho C}\left(q_0 + \frac{\tau l d g}{2B} t\right) \Rightarrow \begin{cases} q_0 = -\dfrac{\rho \tau l C g}{2B} \\ C = \dfrac{d\tau}{B^2} \end{cases}.$$

Как видно, необходимым условием существования указанного в условии режима движения заслонки являются наличие у конденсатора начального заряда

$$q_0 = -\frac{\rho l d g \tau^2}{2B^3},$$

который должен быть противоположен по знаку тому, что создает индукционный ток. Отметим, что нахождение этого заряда не было необходимым для получения ответа, однако его нахождение фактически является проверкой корректности условия. Кроме того, мы находим связь емкости конденсатора с другими параметрами системы $C = \frac{d\tau}{B^2}$.

Ответ: $C = \frac{d\tau}{B^2}$, $x(t) = \frac{g}{4}t^2$., условие корректно, если в начальном состоянии заряд конденсатора противоположен по знаку тому, что создает индукционный ток и равен $q_0 = -\frac{\rho l d g \tau^2}{2B^3}$.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	правильно понята роль ЭДС индукции (используется правильный знак в уравнении для силы тока)	1
2	понята возможность (и даже необходимость) необходимость наличия у конденсатора начального заряда	2
3	в уравнении движения использован правильный знак у силы Ампера	1
4	явно используется (подставляется в уравнения) заданная в условии величина силы тока	2
5	в полученном тождестве независимо приравниваются коэффициенты при нулевой и первой степени *t*	3
6	правильно записано выражение для ЭДС индукции	1
7	получено правильное уравнение для силы тока в цепи	2
8	записано правильное выражение для силы Ампера через ток в цепи	1
9	правильно записан закон изменения заряда конденсатора	2
10	получена правильная формула для емкости конденсатора	3
11	получен правильный закон движения заслонки	2
Всего		**20**

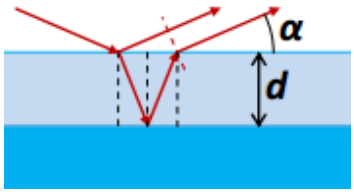
Задание 4:

Вопрос: На экран падают две монохроматические световые волны. Опишите условия, обеспечивающие в некоторой точке этого экрана наблюдение минимума интерференционной картины.

Задача: Широкий резервуар с водой, установленный в лаборатории, покоится, и волн на поверхности воды нет. При этом на поверхности есть масляная пленка, которую освещают рассеянным светом с длиной волны λ = 500 нм. Интенсивность отраженного света измеряется фотодатчиком, ось входного окуляра которого направлена под углом 60º к нормали к поверхности воды. Известно, что масло прозрачное, и его показатель преломления равен n = 1,5. Наблюдения показали, что в течение некоторого времени интенсивность изменяется периодически, причем период почти точно равен T = 15 минут. Определите скорость испарения (то есть скорость уменьшения толщины) масляной пленки.

Ответ на вопрос: Во-первых, для создания интерференционной картины эти волны должны быть когерентны во всей области наблюдения интерференции, то есть должны иметь одинаковую частоту и постоянный сдвиг фаз. Во-вторых, для наблюдения минимума эта разность фаз должна быть равна нечетному кратному π. Это условие будет выполнено, если в данной точке складываются волны, испущенные из одной точки (где они были синфазны), у которых оптическая разность хода до точки наблюдения была равна нечетному числу длин полуволн.

Решение задачи: По условию освещение поверхности воды рассеянное (лучи падают со всех возможных направлений), а сама поверхность ровная и горизонтальная. Лучи, попадающие от поверхности в окуляр, наклонены по отношению к горизонту на некоторый угол $\alpha = 30^{\circ}$. Ясно, что луч, образовавший эти лучи, тоже падал на поверхность под этим углом к горизонту (см. рисунок). Как видно из построения, в интерференции участвуют лучи, отраженные от двух сторон масляной пленки толщиной d. Подсчитаем оптическую разность хода пары лучей от точки падения, в которой они были синфазны. Расстояние между точками «входа» и «выхода» луча в пленку $D = 2d \cdot \mathrm{tg}(\beta)$, где угол преломления β находится из закона Снелла: $\sin(\beta) = \frac{1}{n}\cos(\alpha)$, $\cos(\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\cos^2(\alpha)}$ и $tg(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Поэтому $D = \frac{2d\cos(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Следовательно, путь отраженного луча до общей поверхности волнового фронта со вторым лучом $s_1 = D \cdot \cos(\alpha) = d\frac{2\cos^2(\alpha)}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Оптическая длина хода луча, прошедшего через слой масла, $s_2 = n \cdot 2\frac{d}{\cos(\beta)} = d\frac{2n^2}{\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}}$. Первый луч испытывает отражение от оптически более плотной среды, и к его длине хода нужно добавить половину длины волны. Про второй мы этого наверняка не знаем – скорее всего, показатель преломления воды меньше 1,5, и тогда второй луч отражается от менее плотной среды. Поскольку это точно не известно, запишем оптическую разность хода лучей так:



$$\Delta s = s_2 - s_1 - k\frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} - k\frac{\lambda}{2},$$

где $k = 0$, если показатель преломления воды в луже больше 1,5, и $k = 1$, если меньше. В процессе испарения толщина пленки уменьшается, и максимумы наблюдаемой интенсивности отвечают моментам времени, когда Δs равна целому числу длин волн. Значит, промежуток времени между этими максимумами определяется из условия

$$\lambda = \Delta d \cdot 2\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} = vT \cdot 2\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{2T\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}} = \frac{\lambda}{T\sqrt{6}} \approx 0{,}227\,\frac{\text{нм}}{\text{с}}.$$

Ответ: скорость уменьшения толщины масляной пленки $v = \frac{\lambda}{2T\sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}} \approx 0{,}23\,\frac{\text{нм}}{\text{с}} \approx 0{,}82\,\frac{\text{мкм}}{\text{час}}$.

Критерии для задачи:

№	действие	балл
1	явно указано, что изменение интенсивности связано с интерференцией	1
2	явно указано, что это интерференция лучей, отраженных от разных сторон масляной пленки	2
3	в решении есть правильное построение хода когерентных лучей от точки их разделения	2
4	указано и обосновано, что период изменения интенсивности равен времени, за которое разность хода изменяется на длину волны	3
5	в решении показано, что результат не зависит от показателя преломления воды	2
6	получено правильное выражение для оптической длины пути (от точки разделения до общего волнового фронта) луча, отраженного от внешней поверхности масла	1
7	получено правильное выражение для оптической длины пути луча, проходящего через масло	1
8	правильно записано выражение для полной разности хода лучей	2
9	записано правильное уравнение для скорости испарения	3
10	получен правильный аналитический ответ	2
11	получен правильный численный ответ	1
Всего		**20**