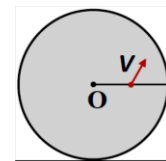


ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2026 года
БИЛЕТ № 05 (11 классы): возможные решения и критерии

Оценка ответа на вопрос: нет ответа – **0 баллов**, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – **1 балл**, есть разумные соображения – **2 балла**, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – **3 балла**, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – **4 балла**, полный, правильный и обоснованный ответ – **5 баллов**.

Задание 1:

Вопрос: Цилиндрический диск катится без проскальзывания по плоской поверхности (плоскость диска перпендикулярна этой поверхности), и в некоторый момент времени точка диска на середине горизонтального радиуса движется со скоростью V под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. С какой скоростью в этот момент движется центр диска?



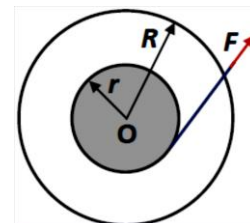
Ответ на вопрос: Скорость отмеченной точки диска можно представить как векторную сумму скорости центра диска (направленной при таком движении горизонтально) и скорости вращения этой точки вокруг центра диска (направленной перпендикулярно радиусу, то есть вертикально). Значит,

$$\begin{cases} V \cdot \cos(\alpha) = v_0 \\ V \cdot \sin(\alpha) = \omega R/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{24}{7} = \frac{\omega R}{2v_0} \\ V^2 = v_0^2 + \frac{\omega^2 R^2}{4} \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{V}{\sqrt{2305}} \approx 0,0208 \cdot V.$$

Примечание: В варианте на олимпиаде в тексте присутствовало условие качения катушки без проскальзывания, что приводило к несогласованности условий. Поэтому при оценке работ полный балл за ответ на этот вопрос ставился не только за приведенное решение, но и за решение, в котором было указано на эту несогласованность, а также за некоторые другие решения, в которых участники предлагали допустимую интерпретацию условия.

Задача: Катушка массы M состоит из двух одинаковых массивных однородных цилиндрических “крышек” радиуса R , соединенных тонкостенной легкой цилиндрической трубкой радиуса $r = 0,5R$

(все три цилиндра имеют общую ось). Эта катушка покоилась на горизонтальной шероховатой поверхности. На поверхность трубки намотана тонким слоем легкая нерастяжимая нить, конец которой потянули с силой $F = \frac{1}{2}Mg$ (где g – ускорение свободного падения), поддерживая постоянным

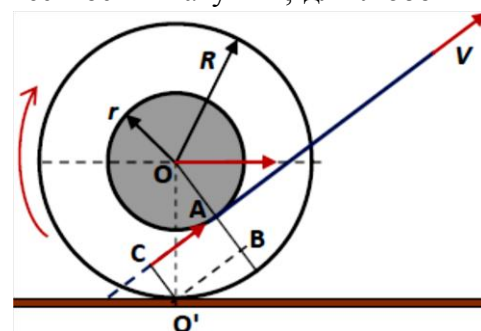


угол наклона $\alpha = \arcsin(0,8) \approx 53,13^\circ$ свободного конца нити к горизонтали. В какую сторону и с каким ускорением будет двигаться поступательно ось катушки, если при этом катушка не будет скользить по поверхности, и нить будет сматываться с нижней части поверхности трубки без проскальзывания? При какой величине коэффициента трения между “крышками” и поверхностью такое движение возможно?

Решение задачи: Ясно, что мгновенная ось вращения катушки проходит через точку касания поверхности O' . Кроме того, благодаря нерастяжимости нити и жесткости катушки, для любой из точек катушки, принадлежащей прямой AC (идушей вдоль нити), проекция скорости точки на эту прямую равна скорости вытягивания нити.

Здесь точка A – точка, в которой нить «уходит» с внутреннего радиуса катушки, а точка C – основание перпендикуляра, опущенного из МЦВ катушки на AC . Ясно, что скорость точки C направлена строго вдоль нити, поэтому величина ее скорости равна V .

В нашем случае $|OB| = R \cos \alpha > |OA| = r$, и катушка является «послушной» - ее вращение соответствует качению в направлении за направлением вытягивания нити. Угловая скорость катушки $\omega = \frac{V}{|O'C|} = \frac{V}{|AB|} = \frac{V}{R \cos \alpha - r}$, а скорость ее центра масс $v_0 = R\omega = R \frac{V}{|O'C|} = \frac{R}{R \cos \alpha - r} \cdot V$. Таким образом, мы можем выразить кинетическую энергию катушки через скорость вытягивания нити:



$$E_k = \frac{Mv_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3MV^2}{4} \left(\frac{R}{R \cos \alpha - r} \right)^2.$$

Увеличение этой кинетической энергии происходит за счет работы силы F , так что

$$dE_k = \frac{3MV}{2} \left(\frac{R}{R \cos \alpha - r} \right)^2 dV = FV \cdot dt \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \left(\frac{R \cos \alpha - r}{R} \right)^2 \frac{2F}{3M}.$$

Ускорение центра масс катушки

$$a_0 = \frac{R}{R \cos \alpha - r} \cdot \frac{dV}{dt} = \left(\frac{R \cos \alpha - r}{R} \right) \frac{2F}{3M} = \frac{g}{30}.$$

С другой стороны, это ускорение создается силой трения и горизонтальной компонентой силы натяжения нити: $Ma_0 = F_{mp} - F \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow F_{mp} = M \frac{g}{30} + \frac{7}{40} Mg = \frac{1}{3} Mg$. Сила нормальной реакции поверхности $N = Mg - F \cdot \sin(\alpha) = \frac{3}{5} Mg$. Поскольку $F_{mp} \leq \mu N$, то $\mu \geq \frac{5}{9} \approx 0,556$.

ОТВЕТЫ: Катушка покатится за нитью с ускорением $a_0 = \left(\frac{R \cos \alpha - r}{R} \right) \frac{2F}{3M} = \frac{g}{30}$, коэффициент трения должен удовлетворять условию $\mu \geq \frac{5}{9}$.

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что мгновенная ось вращения катушки проходит через точку касания поверхности O' (1 балл),

Установлено, что катушка является «непослушной» (3 балла),

Правильно записан закон изменения кинетической энергии либо система уравнений движения (для поступательного и вращательного движения) (3 балла),

Указано, что ограничение на коэффициент трения связано с тем, что величина силы трения не может быть больше μN (1 балл).

Правильно записаны все кинематические связи, необходимые в рамках выбранного метода решения (через соотношение радиусов и угол) (2 балла),

Записано правильное уравнение (одно) для определения ускорения центра масс (2 балла),

Получены правильные ответы для ускорения (аналитический и в долях g) (2+2=4 балла),

Правильно найдены величины силы трения и силы нормальной реакции (1+1=2 балла),

Получен правильный ответ для коэффициента трения (2 балла).

Задание 2:

Вопрос: По какому закону изменяется с высотой давление воздуха в неподвижной атмосфере, если его температура не изменяется?

Ответ на вопрос: Условие равновесия небольшой порции воздуха $S \cdot dp = -dm \cdot g = -\rho g \cdot S \cdot dh$ вместе с уравнением Менделеева-Клапейрона приводит нас к уравнению $\frac{dp}{dh} = -\rho g = -\frac{\mu g}{RT(h)} p$. В

случае постоянной температуры («изотермическая атмосфера») оно приводит к экспоненциальному закону изменения давления с высотой:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh \Rightarrow d \left[\ln \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] = -d \left(\frac{\mu g}{RT} h \right) \Rightarrow p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g}{RT} h}.$$

Задача: Метеозонд – это небольшой баллон, наполненный гелием, к которому прикреплен блок с измерительной аппаратурой. Оболочка баллона непроницаема для гелия, легкая, гибкая, но при этом практически нерастяжимая, так что объем накачанного баллона почти не изменяется при изменениях температуры содержимого. В безветренную погоду при установившемся «высотном профиле» температуры метеозонд долго удерживали у поверхности земли, а затем аккуратно отпустили, и он плавно поднялся вверх до высоты $h_{\max} = 500$ м, а потом стал опускаться. Показания датчиков температуры и высоты в одни и те же моменты времени внесены в таблицу.

$t, ^\circ\text{C} (\pm 0,1^\circ\text{C})$	18,0	17,5	17,0	16,5	16,0	15,5	15,1
$h, \text{м} (\pm 0,2 \text{ м})$	0,0	86,0	172,0	258,0	344,0	430,0	500,0

Спустя какое время после отпускания зонд приземлился? При вычислениях считайте, что молярная масса воздуха $\mu \approx 29$ г/моль, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с², универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль·К), температура абсолютного нуля $t_K \approx -273^\circ\text{C}$, условия в атмосфере во время полета шара не изменялись.

Решение задачи: По данным из таблицы видно, что температура воздуха в атмосфере во время полета зонда изменялась с высотой по закону, который с очень хорошей точностью можно считать

линейным: $t(h) \approx 18,0^\circ\text{C} - \frac{h}{172\text{м}} \cdot 1^\circ\text{C} \Rightarrow T(h) \approx \left(291 - \frac{h}{172\text{м}}\right)\text{К} \equiv T_0 - a \cdot h$. Условие равновесия небольшой порции воздуха $S \cdot dp = -dm \cdot g = -\rho g \cdot S \cdot dh$ вместе с уравнением Менделеева-Клапейрона приводит нас к уравнению $\frac{dp}{dh} = -\rho g = -\frac{\mu g}{RT(h)} p$, из которого можно найти закон изменения давления воздуха с высотой:

$$d[\ln(p/p(0))] = \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{R} \frac{dh}{T_0 - ah} = \frac{\mu g}{Ra} d\left[\ln\left(1 - \frac{ah}{T_0}\right)\right] \Rightarrow p(h) = p(0) \left(1 - \frac{ah}{T_0}\right)^\gamma.$$

Здесь $\gamma \equiv \frac{\mu g}{Ra} \approx 6,00$. С другой стороны, после отпускания зонд движется под действием силы тяжести и силы Архимеда, действующей на баллон. Пусть M – полная масса зонда (вместе с гелием и грузом – из условия ясно, что она постоянна). Поскольку после отпускания зонд начал подниматься, то для него сила Архимеда в приземном слое воздуха больше силы тяжести, поэтому запишем $F_A(0) = k \cdot Mg$ (где $k > 1$). В процессе подъема

$$F_A(h) = \rho(h)Vg = \frac{\mu Vg}{R} \frac{p(h)}{T(h)} = kMg \frac{p(h)}{p(0)} \frac{T(0)}{T(h)} = kMg \left(1 - \frac{ah}{T_0}\right)^{\gamma-1}.$$

Здесь мы учли, что изменением объема баллона можно пренебречь. Поскольку относительное изменение абсолютной температуры за время полета мало (чуть-чуть более 1 %), то можно с хорошей точностью использовать приближенную формулу

$$F_A(h) \approx kMg \left(1 - (\gamma - 1) \frac{ah}{T_0}\right).$$

Тогда уравнение движение зонда во время полета сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$M\ddot{h} = F_A(h) - Mg \approx (k - 1)Mg - kMg(\gamma - 1) \frac{a}{T_0} h,$$

и, если ввести обозначение $\bar{h} \equiv \frac{(k - 1)T_0}{(\gamma - 1)ka}$, $\omega^2 \equiv k(\gamma - 1) \frac{ag}{T_0}$, и записать $h(\tau) = \bar{h} + x(\tau)$, то $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

. Поэтому закон изменения высоты с течением времени τ – гармонический: $h(\tau) = \bar{h} + A \cdot \cos(\omega\tau) + B \cdot \sin(\omega\tau)$. С учетом начальных условий $h(0) = 0$ и $\dot{h}(0) = 0$ приходим к уравнению

$$h(\tau) = \frac{(k - 1)T_0}{(\gamma - 1)ka} [1 - \cos(\omega\tau)].$$

Как видно, максимальная высота подъема

$$h_{\max} = 2 \frac{(k - 1)T_0}{(\gamma - 1)ka} \Rightarrow k = \frac{2T_0}{2T_0 - (\gamma - 1)ah_{\max}} \approx 1,0256.$$

Полет зонда занимает ровно один период «колебаний», и время возвращения

$$\tau \approx \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{T_0}{(\gamma - 1)kag}} \approx 196 \text{ с.}$$

ОТВЕТ: Спустя время $\tau \approx 2\pi \sqrt{\frac{T_0}{(\gamma - 1)kag}} \approx 196 \text{ с.}$

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что температура изменялась с высотой по линейному закону (1 балл),

Корректно использовано условие механического равновесия атмосферы (2 балла),

Использовано условие постоянства объема зонда (1 балл),

Правильно найден закон изменения давления с высотой (3 балла),

Указано, что изменение силы Архимеда связано и изменением температуры содержимого зонда, которая примерно равна температуре окружающего воздуха (1+2=3 балла),

Получен правильный закон изменения силы Архимеда с высотой (2 балла),

Уравнение движения приведено к виду уравнения гармонических колебаний (3 балла),

Явно найден правильный закон движения зонда (2 балла),

Получены правильные ответы (аналитический и численный) (2+1=3 балла).

Задание 3:

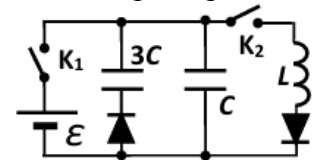
Вопрос: «Слабонеидеальный» диод пропускает любой ток при достижении напряжения U_0 , а при меньшем напряжении ток не пропускает. Чему равна его мощность потребления в электрической цепи?

Ответ на вопрос: Согласно закону Джоуля-Ленца, мгновенная мощность потребления любого элемента схемы равна $P = U \cdot I$. У описанного в вопросе слабонеидеального диода в запертом состоянии сила тока (а вместе с ней и потребляемая мощность) равна нулю, а в открытом состоянии напряжение постоянно. Поэтому мощность пропорциональна силе тока, то есть

$$P = \begin{cases} 0, & U < U_0 \\ U_0 \cdot I, & U \geq U_0 \end{cases}$$

Таким образом, выделяемое на слабонеидеальном диоде количество теплоты всегда пропорционально протекшему через него заряду: $Q = U_0 \cdot q$.

Задача: В схеме, изображенной на рисунке, сначала замкнули ключ К1, через некоторое время его разомкнули и замкнули ключ К2. Какими станут заряды конденсаторов спустя достаточно долгое время (утечки заряда нет)? Диоды одинаковы и являются «слабонеидеальными». Известно, что ЭДС источника в 5 раз больше порогового напряжения U_0 диодов. Какое количество теплоты выделится на каждом из диодов после замыкания К2? Через какое время после замыкания К2 напряжение на конденсаторе С перестанет изменяться? Излучением и сопротивлением источника, катушки и соединительных проводов пренебречь.



Решение задачи: После замыкания К1 «правый» конденсатор заряжается от источника до напряжения $5U_0$ («левый» остается незаряженным, так как диод в ветви с ним запирается). После размыкания К1 и замыкания К2 «правый» конденсатор начинает разряжаться через катушку. «Правый» диод открыт, и – в соответствии с описанием его ВАХ – напряжение на нем постоянно и равно U_0 . «Левый» диод будет заперт, пока напряжение на правом конденсаторе не станет равно $-U_0$ (то есть оно должно поменять полярность по сравнению с начальным моментом и уменьшиться по модулю). Уравнение баланса напряжений в контуре из «правого» конденсатора, катушки и диода

$$\frac{q}{C} = L \frac{dI}{dt} + U_0 = -L \frac{d^2q}{dt^2} + U_0 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = \frac{U_0}{L}$$

С учетом начальных условий $q(0) = 5CU_0$ и $\dot{q}(0) = 0$ находим, что $q(t) = CU_0[1 + 4\cos(\omega t)]$, где

$\omega \equiv \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Как видно, в момент времени $t_0 = \frac{2\pi}{3\omega} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{LC}$ напряжение на «правом» конденсаторе достигает значения, необходимого для открытия «левого» диода ($-U_0$). После открытия «левого» диода ток катушки будет заряжать уже два конденсатора, причем в любой момент времени на этой стадии полярность заряда конденсаторов $q < 0$, и $\frac{1}{3} \cdot q_L(t) \equiv CU_0 + q_{\Pi}(t)$. Тогда нам ясно, что в «правый» конденсатор будет затекать $\frac{1}{4}$ тока, текущего через катушку, а в «левый» – $\frac{3}{4}$. Следовательно, уравнение колебаний заряда правого конденсатора при $t > t_0$ принимает вид

$$\frac{d^2q_{\Pi}}{dt^2} + \frac{1}{4LC} q_{\Pi} = -\frac{U_0}{4L} \Rightarrow q_{\Pi}(t) = -CU_0 \left\{ 1 + \sqrt{3} \cdot \sin \left[\frac{\omega}{2} (t - t_0) \right] \right\}.$$

Здесь константы выбраны в соответствии с начальными условиями. Сила тока зарядки правого конденсатора (заряд отрицателен и уменьшается) $I_{\Pi}(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega CU_0 \cdot \cos \left[\frac{\omega}{2} (t - t_0) \right]$. Сила тока через «правый» диод в каждый момент времени в 4 раза больше, а через «левый» – в 3 раза больше. Ток обращается в ноль в момент времени $t_1 = t_0 + \frac{\pi}{\omega} = \frac{5\pi}{3}\sqrt{LC}$. Далее ток должен изменить знак, но оба диода перейдут в запертое состояние, и колебания прекратятся. Итак, напряжение на конденсаторе С перестанет изменяться спустя время $t_1 = \frac{5\pi}{3}\sqrt{LC}$. Выделение тепла на диодах связано с протекшим через них зарядом:

$$Q_{\Pi} = U_0 \cdot q_{\Pi} = U_0 \cdot 4 \int_{t_0}^{t_1} |I_{\Pi}(t)| dt = 4\sqrt{3} \cdot CU_0^2.$$

Ясно, что $Q_L = \frac{3}{4} Q_{\Pi} = 3\sqrt{3} \cdot CU_0^2$.

ОТВЕТЫ: Напряжение на «правом» конденсаторе перестанет изменяться спустя время $t_1 = \frac{5\pi}{3}\sqrt{LC}$, $Q_L = 3\sqrt{3} \cdot CU_0^2$, $Q_{\Pi} = 4\sqrt{3} \cdot CU_0^2$.

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что при зарядке «правого» конденсатора «левый» диод заперт (1 балл),

Указано, что после замыкания К2 до некоторого момента времени «левый» диод остается в запертом состоянии (3 балла),

Доказано, что в некоторый момент времени «левый» диод отпирается, и далее ток катушки заряжает оба конденсатора (3 балла),

Выяснено, что в момент обращения силы тока в ноль оба диода запираются и колебания прекращаются (3 балла),

Правильно найдено t_0 и получен закон колебаний (заряда конденсатора или силы тока через катушку) от начала колебаний до t_0 (1+2=3 балла),

Правильно найдено t_1 и получен закон колебаний (заряда конденсатора или силы тока через катушку) от t_0 до t_1 (1+2=3 балла),

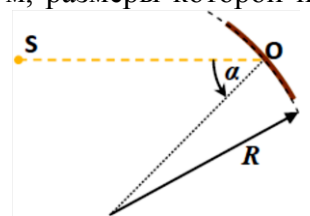
Правильно найдены Q_L и Q_{II} (2+2=4 балла).

Задание 4:

Вопрос: При каких условиях световой пучок в оптически однородной среде можно рассматривать как набор прямолинейных лучей?

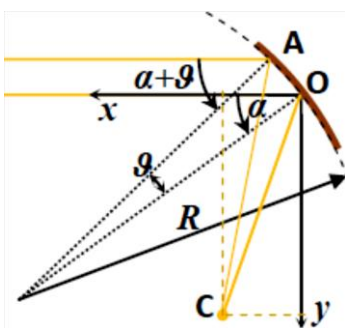
Ответ на вопрос: При классическом описании свет рассматривается как наложение электромагнитных волн. В приближении геометрической оптики мы пренебрегаем волновыми свойствами света, и рассматриваем его как совокупность прямолинейных в оптически однородной среде световых лучей. Волновые явления становятся существенны, когда характерные размеры препятствий и поперечные размеры световых пучков по порядку величины равны или меньше длины световой волны излучения. Таким образом, приближение геометрической оптики можно использовать, если размеры препятствий и ширина светового пучка намного больше длин волн, входящих в состав света. Оптический диапазон отвечает длинам волн (в вакууме) порядка нескольких сотен нанометров, так что можно считать, что для корректности использования волновой оптики достаточно, чтобы упомянутые размеры были много больше 1 мкм. Отметим, что в прозрачных преломляющих средах длины волн меньше, чем в вакууме, так что для линейных сред условие применимости приближения геометрической оптики остается тем же.

Задача: Небольшой источник звука S частотой $\nu = 6$ кГц находится на большом расстоянии от участка вертикальной цилиндрической стены с радиусом кривизны $R = 20$ м, размеры которой по вертикали и горизонтали около 1 м. Горизонтальный луч, проведенный от источника к центру стены O, составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с перпендикуляром к стене в этой точке (см. рисунок). Маленький микрофон установлен так, что он принимает звук от источника с максимальной возможной амплитудой. Найдите расстояние от точки O до микрофона. Скорость звука в воздухе $c \approx 340$ м/с, его поглощением можно пренебречь.



Решение задачи: В первую очередь обратим внимание, что длина волны этого звука $\lambda = \frac{c}{\nu} \approx 5,67$ см

намного меньше размеров стены, так что мы можем изучать распространение звука в рамках приближения «геометрической акустики», и тогда искомая точка C – это изображение источника в «цилиндрическом зеркале». Рассмотрим «лучи», падающие от источника в точку O и близкую к ней точку A (поскольку размеры стены намного меньше радиуса ее кривизны, то угловой размер дуги OA $\vartheta \ll 1$). Отметим, что для удаленного на «большое расстояние» источника лучи SO и SA можно считать параллельными. Отраженные лучи пересекаются в точке C. Так как угол падения равен углу отражения, то угол SOC равен 2α , а угол SAC равен $2(\alpha + \vartheta)$. Значит, угол ACO равен 2ϑ . Из теоремы синусов для треугольника



ACO следует, что (с учетом малости угла ϑ)

$$\frac{|AO|}{\sin(2\vartheta)} = \frac{|OC|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \vartheta\right)} \Rightarrow |OC| = \cos(\alpha + \vartheta) \frac{|AO|}{\sin(2\vartheta)} \approx \cos(\alpha) \frac{R\vartheta}{2\vartheta} = \frac{R}{2} \cos(\alpha).$$

Численное значение $r \approx 14,14$ м ≈ 14 м.

ОТВЕТ: $|OC| \approx \frac{R}{2} \cos(\alpha) \approx 14$ м.

Критерии для проверки задачи:

Вычислена длина звуковой волны (1 балл),

Объяснено, что волновые эффекты несущественны и можно использовать приближение «геометрической акустики» (**4 балла**),

Анализируется отражение «лучей» от цилиндрического зеркала (**1 балл**),

Указано (используется в решении), что для удаленного на «большое расстояние» источника лучи можно считать параллельными (**2 балла**),

Правильно используется условие $\vartheta \ll 1$ (**2 балла**).

Есть правильное построение хода лучей (**3 балла**),

Правильно определены все используемые углы (можно сразу использовать условие малости ϑ) (**3 балла**),

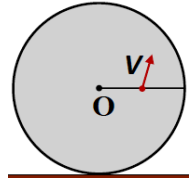
Получены правильные ответы (аналитический и численный) (**3+1=4 балла**).

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ» по ФИЗИКЕ
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2026 года
БИЛЕТ № 06 (11 классы): возможные решения и ответы:**

Оценка ответа на вопрос: нет ответа – 0 баллов, есть неверный ответ с частично правильной терминологией – 1 балл, есть разумные соображения – 2 балла, в основном все правильно, но есть заметные неточности или ответ неполон – 3 балла, правильный ответ с мелкими недочетами или недостаточно обоснованный – 4 балла, полный, правильный и обоснованный ответ – 5 баллов.

Задание 1:

Вопрос: Цилиндрический диск катится по плоской поверхности (плоскость диска перпендикулярна этой поверхности), и в некоторый момент времени точка диска на середине горизонтального радиуса движется со скоростью V под углом $\alpha = \arcsin(0,96) \approx 73,74^\circ$ к горизонту. С какой скоростью в этот момент движется центр диска?

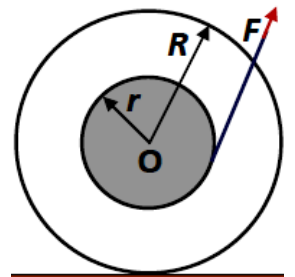


Ответ на вопрос: Скорость отмеченной точки диска можно представить как векторную сумму скорости центра диска (направленной при таком движении горизонтально) и скорости вращения этой точки вокруг центра диска (направленной перпендикулярно радиусу, то есть вертикально). Значит,

$$\begin{cases} V \cdot \cos(\alpha) = v_0 \\ V \cdot \sin(\alpha) = \omega R/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{24}{7} = \frac{\omega R}{2v_0} \\ V^2 = v_0^2 + \frac{\omega^2 R^2}{4} \end{cases} \Rightarrow v_0 = \frac{V}{\sqrt{2305}} \approx 0,0208 \cdot V.$$

Примечание: В варианте на олимпиаде в тексте присутствовало условие качения катушки без проскальзывания, что приводило к несогласованности условий. Поэтому при оценке работ полный балл за ответ на этот вопрос ставился не только за приведенное решение, но и за решение, в котором было указано на эту несогласованность, а также за некоторые другие решения, в которых участники предлагали допустимую интерпретацию условия.

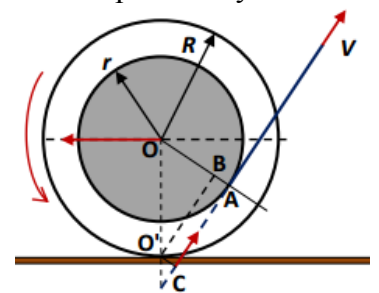
Задача: Катушка массы M состоит из двух одинаковых массивных однородных цилиндрических “крышек” радиуса R , соединенных тонкостенной легкой цилиндрической трубкой радиуса $r = 0,48R$ (все три цилиндра имеют общую ось). Эта катушка покоилась на горизонтальной шероховатой поверхности. На поверхность трубки намотана тонким слоем легкая нерастяжимая нить, конец которой потянули с силой $F = \frac{5}{8}Mg$ (где g – ускорение свободного падения), поддерживая постоянным



угол наклона $\alpha = \arcsin(0,96) \approx 73,74^\circ$ свободного конца нити к горизонтали. В какую сторону и с каким ускорением будет двигаться поступательно ось катушки, если при этом катушка не будет скользить по поверхности, и нить будет сматываться с нижней части поверхности трубки без проскальзывания? При какой величине коэффициента трения между “крышками” и горизонтальной поверхностью такое движение возможно?

Решение задачи: Ясно, что мгновенная ось вращения катушки проходит через точку касания поверхности O' . Кроме того, благодаря нерастяжимости нити и жесткости катушки, для любой из точек катушки, принадлежащей прямой AC (идущей вдоль нити), проекция скорости точки на эту прямую равна скорости вытягивания нити.

Здесь точка A – точка, в которой нить «уходит» с внутреннего радиуса катушки, а точка C – основание перпендикуляра, опущенного из МЦВ катушки на AC . Ясно, что скорость точки C направлена строго вдоль нити, поэтому величина ее скорости равна V .



В нашем случае $|OB| = R \cos \alpha < |OA| = r$, и катушка является «непослушной» - ее вращение соответствует качению в направлении, противоположном направлению вытягивания нити.

Угловая скорость катушки $\omega = \frac{V}{|O'C|} = \frac{V}{|AB|} = \frac{V}{r - R \cos \alpha}$, а скорость ее центра масс, получим

$v_o = R\omega = R \frac{V}{|O'C|} = \frac{R}{r - R \cos \alpha} \cdot V$. Таким образом, мы можем выразить кинетическую энергию катушки через скорость вытягивания нити:

$$E_K = \frac{Mv_o^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3MV^2}{4} \left(\frac{R}{r - R \cos \alpha} \right)^2.$$

Увеличение этой кинетической энергии происходит за счет работы силы F , так что

$$dE_K = \frac{3MV}{2} \left(\frac{R}{r - R \cos \alpha} \right)^2 dV = FV \cdot dt \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \left(\frac{r - R \cos \alpha}{R} \right)^2 \frac{2F}{3M}.$$

Ускорение центра масс катушки

$$a_o = \frac{R}{r - R \cos \alpha} \cdot \frac{dV}{dt} = \left(\frac{r - R \cos \alpha}{R} \right) \frac{2F}{3M} = \frac{g}{12}.$$

С другой стороны, это ускорение создается силой трения и горизонтальной компонентой силы натяжения нити: $Ma_o = F_{mp} - F \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow F_{mp} = M \frac{g}{12} + \frac{7}{40} Mg = \frac{31}{120} Mg$. Сила нормальной реакции поверхности $N = Mg - F \cdot \sin(\alpha) = \frac{2}{5} Mg$. Поскольку $F_{mp} \leq \mu N$, то $\mu \geq \frac{31}{48} \approx 0,646$.

ОТВЕТЫ: Катушка покатится в направлении, противоположном направлению вытягивания нити, с ускорением $a_o = \left(\frac{r - R \cos \alpha}{R} \right) \frac{2F}{3M} = \frac{g}{12}$, коэффициент трения должен удовлетворять условию $\mu \geq \frac{31}{48}$.

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что мгновенная ось вращения катушки проходит через точку касания поверхности O' (1 балл),

Установлено, что катушка является «непослушной» (3 балла),

Правильно записан закон изменения кинетической энергии либо система уравнений движения (для поступательного и вращательного движения) (3 балла),

Указано, что ограничение на коэффициент трения связано с тем, что величина силы трения не может быть больше μN (1 балл).

Правильно записаны все кинематические связи, необходимые в рамках выбранного метода решения (через соотношение радиусов и угол) (2 балла),

Записано правильное уравнение (одно) для определения ускорения центра масс (2 балла),

Получены правильные ответы для ускорения (аналитический и в долях g) (2+2=4 балла),

Правильно найдены величины силы трения и силы нормальной реакции (1+1=2 балла),

Получен правильный ответ для коэффициента трения (2 балла).

Задание 2:

Вопрос: Радиус пузыря из мыльного раствора с коэффициентом поверхностного натяжения σ постоянен и равен R . Найдите разность давлений воздуха внутри пузыря и снаружи.

Ответ на вопрос: Давление воздуха внутри пузыря превышает давление окружающего воздуха p_A на величину лапласовского давления, создаваемого двумя сферическими поверхностями (внешняя и внутренняя поверхности тонкой мыльной пленки) с радиусами кривизны, примерно равными радиусу пузыря: $p = p_A + \frac{4\sigma}{r}$.

Задача: Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы медленно выдуть мыльный пузырь радиусом $R = 4$ см? Коэффициент поверхностного натяжения раствора $\sigma \approx 0,04$ Н/м. Давление окружающего воздуха примерно равно нормальному атмосферному $p_A \approx 100$ кПа. При расчетах считайте, что температура окружающего воздуха и температура воздуха внутри пузыря примерно постоянны и одинаковы.

Решение задачи: Важное дополнительное предположение состоит в том, что мы задуваем в пузырь воздух, забираемый из окружающего воздуха. Тогда при медленном выдувании мы считаем, что воздух внутри пузыря – газ, который имеет постоянную температуру, и в каждый момент времени оболочка пузыря находится в механическом равновесии. Значит, давление воздуха внутри пузыря $p = p_A + \frac{4\sigma}{r}$. Совершаемая работа идет на увеличение энергии мыльной пленки

$$A_1 = \Delta(\sigma \cdot 2 \cdot 4\pi r^2) \approx 8\pi\sigma R^2$$

(начальный радиус считаем пренебрежимо малым) и на работу по «почти изотермическому» сжатию воздуха, в ходе которого его давление повышается от p_A до $p = p_A + \frac{4\sigma}{r}$:

$$A_2 = -\nu RT \cdot \ln\left(\frac{V_k}{V_H}\right) = p_A \left(1 + \frac{4\sigma}{p_A R}\right) \frac{4\pi}{3} R^3 \ln\left(1 + \frac{4\sigma}{p_A R}\right) \approx \frac{16\pi}{3} \sigma R^2.$$

Здесь мы учли то обстоятельство, что $\frac{4\sigma}{p_A R} \approx 0,00002 \ll 1$. Конечно, могут быть дополнительные потери, но меньшей работой обойтись нельзя, так что

$$A_{min} = A_1 + A_2 \approx \frac{40\pi}{3} \sigma R^2 \approx 2,68 \text{ мДж.}$$

ОТВЕТ: Минимальная необходимая для выдувания пузыря работа $A_{min} = \frac{40\pi}{3} \sigma R^2 \approx 2,68 \text{ мДж.}$

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что давление воздуха внутри пузыря $p = p_A + \frac{4\sigma}{r}$ (**1 балл**),

Указано, что часть работы идет на увеличение площади поверхности мыльной пленки (**3 балла**),

Указано, что в процессе выдувания пузыря с воздухом происходит процесс, который можно считать изотермическим сжатием (**4 балла**),

Правильно учтена малость $\frac{4\sigma}{p_A R}$ (**2 балла**).

Правильно вычислено изменение поверхностной энергии пленки (**3 балла**) (если ошибка в два раза – 2 балла),

Записано правильное выражение для вычисления работы по изотермическому сжатию через давления (**2 балла**),

Получен правильный ответ для этой работы (**2 балла**),

Получены правильные ответы (аналитический и численный) (**2+1=3 балла**).

Задание 3:

Вопрос: Чему равна индукция магнитного поля в центре кругового контура радиусом a , если сила тока в нем равна I ?

Ответ на вопрос: Можно, например, воспользоваться законом Био-Савара-Лапласа: если разбить контур с током I на бесконечно малые элементы dl , то вектор индукции магнитного поля контура в точке наблюдения равен сумме вкладов отдельных элементов $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{[dl \times \vec{r}]}{r^3}$, где \vec{r} – вектор, соединяющий элемент тока и точку наблюдения. При применении этого закона к вычислению индукции поля в центре кольца замечаем, что все вектора \vec{r} направлены по радиусу, и векторное произведение для любого из элементов направлено вдоль оси контура (так, чтобы при взгляде «навстречу» ему мы видели ток обходящим контур в положительном направлении). Модуль этого произведения равен $a \cdot dl$, а сумма всех dl дает $2\pi a$. Таким образом, индукция поля в центре кругового тока $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{n}$.

Задача: Тонкое проволочное кольцо радиуса $R = 62,8$ см установлено вертикально в вакуумной камере. Из его верхней точки падает без начальной скорости пылинка. В момент пролета ею центра кольца через кольцо пропускают заряд величиной $Q = 2414$ мКл (время его прохождения около 3 мс, импульс тока симметричен, и его максимум приходится точно на этот момент). В результате пылинка отклонилась от вертикали и упала на кольцо в точке на высоте $h = 2$ см над его нижней точкой. Определите удельный заряд пылинки (то есть отношение ее заряда к массе). Действием на пылинку индуцированных на кольце зарядов пренебречь.

Решение задачи: При протекании изменяющегося тока через кольцо в области вблизи центра кольца создается переменное магнитное поле, а оно создает индукционное (вихревое) электрическое поле. Считая время протекания $\Delta t \gg \frac{R}{c}$ (c – скорость света в вакууме), можно при вычислении этих полей использовать квазистационарное приближение, то есть считать, что сила тока в каждой небольшой части этого интервала $I = \frac{\delta Q}{\delta t}$ почти постоянна, и тогда мгновенное значение магнитной индукции можно вычислять по формуле из вопроса. Затем и электрическое

поле мы связываем со скоростью изменения магнитной индукции. Следовательно, магнитное поле в центре кольца направлено перпендикулярно плоскости кольца и имеет величину $B = \frac{\mu_0 \delta Q}{2a \delta t}$.

Со стороны этого магнитного поля на частицу действует сила Лоренца, сообщающая ей горизонтальное ускорение $a_x = \frac{q}{m} V_y B \Rightarrow \frac{\delta V_x}{\delta t} \approx \frac{q}{m} \sqrt{2gR} \frac{\mu_0 \delta Q}{2R \delta t}$. Таким образом, изменение

горизонтальной составляющей скорости тела в результате «магнитного удара» пропорционально протекшему заряду с постоянным коэффициентом пропорциональности: $\delta V_x \approx \frac{q}{m} \sqrt{\frac{g}{2R}} \mu_0 \delta Q$.

Значит, таким же образом будут связаны и изменения этих величин за все время «удара»:

$$V_x = \sum \delta V_x \approx \frac{q}{m} \sqrt{\frac{g}{2R}} \mu_0 \sum \delta Q = \frac{q}{m} \sqrt{\frac{g}{2R}} \mu_0 Q.$$

Для нахождения напряженности электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции: запишем ЭДС индукции в контуре с радиусом $y \ll R$ и центром в центре нашего кольца как скорость изменения магнитного потока через него: $E_x \cdot 2\pi y = -\frac{d}{dt}(B \cdot \pi y^2) \Rightarrow E_x = \frac{1}{2} y \frac{dB}{dt}$.

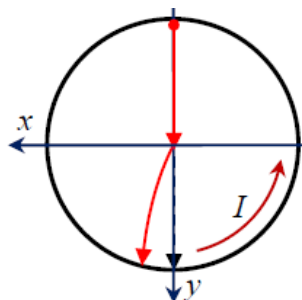
Отметим, что в ходе протекания заряда сила тока (и связанная с ней магнитная индукция) сначала увеличивается от нуля до максимума, а затем симметрично убывает до нуля. Поэтому знак скорости изменения индукции изменяется, и направление вихревого электрического поля изменяется. Но одновременно при проходе через центр кольца пылинка попадает на другую половину окружности, и направление действующей на нее силы не изменяется – она все время направлена против силы Лоренца. Изменение x -проекции скорости пылинки за счет действия силы со стороны электрического поля равно

$$V'_x = 2 \frac{q}{m} \cdot \sum E_x = \frac{q}{m} \int_0^{\frac{\tau}{2}} y \frac{dB}{dt} dt = \frac{q}{m} V_y \int_0^{\frac{\tau}{2}} t \frac{dB}{dt} dt = -\frac{q}{m} V_y \int_0^{\frac{\tau}{2}} B dt = -\frac{q}{2m} \sqrt{\frac{g}{2a}} \mu_0 Q.$$

Как видно, оно в два раза меньше по модулю и противоположного знака по сравнению с V_x .

Значит, полное изменение скорости

$$V_x = \frac{q}{2m} \sqrt{\frac{g}{2a}} \mu_0 Q.$$



После «удара» тело будет двигаться в поле тяжести по участку параболы, поэтому в ходе этого движения

$$\begin{cases} x(t) = V_x t \\ y(t) = V_y t + \frac{g t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{V_y}{V_x} x + \frac{g}{2V_x^2} x^2.$$

В момент соударения с кольцом $y = a - h \approx a$, $x = \sqrt{a^2 - (a - h)^2} \approx \sqrt{2ah}$ (переход к приближенным равенствам совершен в соответствии с тем, что по условию $h \ll a$). Подставляя эти значения в уравнение траектории, получаем:

$$h + \frac{q \mu_0 Q}{m \sqrt{2a}} \sqrt{h} - \left(\frac{q}{m}\right)^2 \frac{\mu_0^2 Q^2}{8a} = 0.$$

Так как отбор «физически значимых» корней этого уравнения проще производить, ориентируясь на требование $\sqrt{h} > 0$, то удобней сначала найти из этого уравнения, что

$$\sqrt{ah} \approx \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \mu_0 Q \frac{q}{m},$$

а затем уже выразить удельный заряд, учитывая, что изменение его знака на самом деле изменит только направление отклонения тела от вертикали, но не высоту точки его падения на кольцо:

$$\frac{q}{m} \approx \pm \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \frac{\sqrt{ah}}{\mu_0 Q} = \pm 2(\sqrt{2} + 2) \frac{\sqrt{ah}}{\mu_0 Q}.$$

ОТВЕТ: Удельный заряд пылинки $\frac{q}{m} \approx \pm 2(\sqrt{2} + 2) \frac{\sqrt{ah}}{\mu_0 Q}$.

Критерии для проверки задачи:

Указано (используется в решении), что при прохождении заряда в окрестности центра кольца возникает магнитное поле (1 балл),

Указано, что при прохождении заряда в окрестности центра кольца возникает вихревое электрическое поле (2 балла),

Указано (используется в решении), что при изучении влияния импульса V_y можно считать примерно постоянной (2 балла),

Применен правильный метод расчета изменения V_x за счет действия магнитного поля (2 балла),

Применен правильный метод расчета изменения V_x за счет действия электрического поля (2 балла),

Правильно описано движение пылинки после «удара» (1 балл);

Правильно вычислена V_y (1 балл),

Получено правильное выражение для V_x , обусловленной действием магнитного поля (2 балла),

Получено правильное выражение для V'_x (3 балла),

Получено правильное выражение для полной V_x (1 балл),

Получено правильное уравнение связи с удельным зарядом (1 балл),

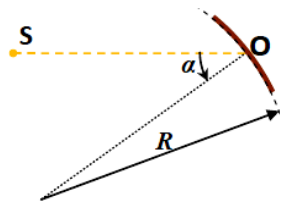
Получен правильный ответ (2 балла).

Задание 4:

Вопрос: При каких условиях распространение света можно описывать в рамках приближения геометрической оптики?

Ответ на вопрос: При классическом описании свет рассматривается как наложение электромагнитных волн. В приближении геометрической оптики мы пренебрегаем волновыми свойствами света, и рассматриваем его как совокупность прямолинейных в оптически однородной среде световых лучей. Волновые явления становятся существенны, когда характерные размеры препятствий и поперечные размеры световых пучков по порядку величины равны или меньше длины световой волны излучения. Таким образом, приближение геометрической оптики можно использовать, если размеры препятствий и ширина светового пучка намного больше длин волн, входящих в состав света. Оптический диапазон отвечает длинам волн (в вакууме) порядка нескольких сотен нанометров, так что можно считать, что для корректности использования волновой оптики достаточно, чтобы упомянутые размеры были много больше 1 мкм. Отметим, что в прозрачных преломляющих средах длины волн меньше, чем в вакууме, так что для линейных сред условие применимости приближения геометрической оптики остается тем же.

Задача: Небольшой источник звука S частотой $\nu = 8$ кГц находится на большом расстоянии от участка вертикальной цилиндрической стены с радиусом кривизны $R = 30$ м, размеры которой по вертикали и горизонтали около 1,5 м. Горизонтальный луч, проведенный от источника к центру стены O , составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с перпендикуляром к стене в этой точке (см. рисунок). Маленький микрофон установлен так, что он принимает звук от источника с максимальной возможной амплитудой. Найдите расстояние от точки O до микрофона. Скорость звука в воздухе $c \approx 340$ м/с, его поглощением можно пренебречь.



Решение задачи: В первую очередь обратим внимание, что длина волны этого звука $\lambda = \frac{c}{\nu} = 4,25$

см намного меньше размеров стены, так что мы можем изучать распространение звука в рамках приближения «геометрической акустики», и тогда искомая точка C – это изображение источника в «цилиндрическом зеркале». Рассмотрим «лучи», падающие от источника в точку O и близкую к ней точку A (поскольку размеры стены намного меньше радиуса ее кривизны, то угловой размер дуги OA $\vartheta \ll 1$). Отметим, что для удаленного на «большое расстояние» источника лучи SO и SA можно считать параллельными. Отраженные лучи пересекаются в точке C . Так как угол падения равен углу отражения, то угол SOC равен 2α , а угол SAC равен $2(\alpha + \vartheta)$. Значит, угол ACO равен 2ϑ . Из теоремы синусов для треугольника ACO следует, что (с учетом малости угла ϑ)

$$\frac{|AO|}{\sin(2\vartheta)} = \frac{|OC|}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \vartheta\right)} \Rightarrow |OC| = \cos(\alpha + \vartheta) \frac{|AO|}{\sin(2\vartheta)} \approx \cos(\alpha) \frac{R\vartheta}{2\vartheta} = \frac{R}{2} \cos(\alpha).$$

Численное значение $r \approx 12,99$ м ≈ 13 м.

Критерии для проверки задачи:

Вычислена длина звуковой волны (1 балл),

Объяснено, что волновые эффекты несущественны и можно использовать приближение «геометрической акустики» (**4 балла**),

Анализируется отражение «лучей» от цилиндрического зеркала (**1 балл**),

Указано (используется в решении), что для удаленного на «большое расстояние» источника лучи можно считать параллельными (**2 балла**),

Правильно используется условие $\vartheta \ll 1$ (**2 балла**).

Есть правильное построение хода лучей (**3 балла**),

Правильно определены все используемые углы (можно сразу использовать условие малости ϑ) (**3 балла**),

Получены правильные ответы (аналитический и численный) (**3+1=4 балла**).