



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шевчук Артём Дмитриевич**

Класс: **11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шевчук Артём Дмитриевич

Класс: 11

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Сумма* |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|
| 20 баллов | 15 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 15 баллов | 90 баллов |

мест 1 из 14 шатки №1

вариант II

№1

Все грузинские места в последовательности
20 21 22 23... с 20 до 99 занимают 160 мест.

Оставшиеся места занимают украинские

места с 100 до 1860: $3 + 100 - 1 = 620 + 99 = 719$.

Места с 100 до 719 занимают оставшиеся

1860 мест. Ну необходимая уездная стоит на

1861 месте среди проезжих мест.

Следовательно, на 1861 месте стоит первая

уездная улица, последующие до 719 - 710.

Первая уездная улица 710 - 7.

Ответ: 7.

дог
мем 2 уз 14

мемориз №
№2

Вопрос 2

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$$

$$ОДЗ: x \in [-1; 1]$$

Тип $b = -1$:

$$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$$

$$a - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2} - 1$$

Тип $a = \frac{\pi}{2} - 1$ графически

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

имеем бесконечное множество корней $x = 1$ при любом значении b

$$Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$$$

~~$$\log_2(x-3) = \log_2(x^2-4)$$~~

~~$$(x-3)\log_2 = \log_2(x^2-2)$$~~

~~Пусть $t = x-3$, $d = \log_2$, тогда~~

дано 3 и 314

используем 1/3

Вопрос 2

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg_2(x^2-2)$$

$$(x^2-3)^{\lg 2} = \lg_2(x^2-2)$$

Пусть $t = x^2 - 3$, но $\lg 2 = \alpha$, тогда

$$\alpha(t+1) = t^\alpha \quad \alpha < 1$$

$$(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{t^{1-\alpha}}$$

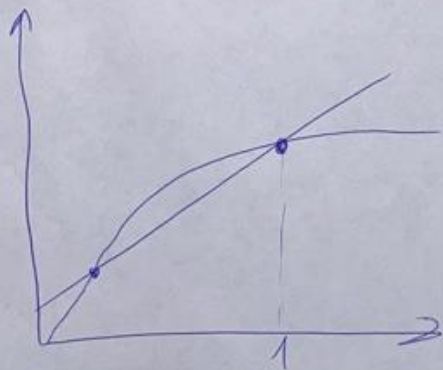
График функции вверх, производная монотонно ~~убывает~~ уменьшается.

Пусть $f(x) = (t+1) \cdot \alpha$; $g(t) = t^\alpha$, тогда

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha & g(0) &= 0 \Rightarrow f(0) > g(0) \\ g(1) &= 1 & f(1) &= 2\alpha \Rightarrow g(1) > f(1) \end{aligned}$$

$$1 > 2\lg 2$$

$$\sqrt{2} > \lg 2 \Leftrightarrow \sqrt{10} > 2 \Leftrightarrow 10 > 4 \text{ - верно}$$



Две точки пересечения
 \Rightarrow 4 корня так
как $t = x^2 - 3$

Ответ: 4

используя условие №4

Вариант 2

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

Пусть $a = \frac{1}{xyz}$, тогда:

$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 6 \\ 3z - 6x + ay = 2 \\ 6y - 2z - ax = 3 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \ominus \\ \cdot 2 \\ \ominus \end{array}$$

$$\begin{cases} (a-9)y + (3a+3)z = 20 \\ (a^2+36)y - (3a-12)z = 2a+18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-9)y + (3a+3)z = 20 \\ (3a-12)z + y(36+a^2) = 18+2a \end{cases} \begin{array}{l} (a-4) \\ +\ominus \\ (a+1) \end{array} \begin{array}{l} (a^2+36) \\ \ominus \\ (a-9) \end{array}$$

$$\begin{cases} [(a-9)(a-4) - (a+1)(a^2+36)]y = 20(a-4) - 2(a+9)(a+1) \\ [3(a+1)(a^2+36) - 3(a-4)(a-9)]z = 20(a^2-36) - 2(a+9)(a-9) \end{cases}$$
$$\begin{cases} [a^2-4a-9a+36 - a^3-36a-a^2-36]y = 20a-80-2a^2-20a-18 \\ [3a^3+36a+a^2+36-3a^2+9a+45-36]z = 20a^2-720-2a^2-162 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^3+48a)y = 2a^2-98 * \\ 3(a^3+48a)z = 882+18a^2 \Delta \end{cases}$$

$$* ay(a^2+48) = 2(a^2+48)$$

$$ay = 2$$

$$\Delta 3a(a^2+48)z = 18(a^2+48)$$

$$3az = 18$$

$$az = 6$$

номер 5 из 14 Умножения №5

Вариант 2

$$\begin{cases} ay = 2 \\ az = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a} \\ z = \frac{6}{a} \end{cases}$$

Подставим в первое уравнение:

$$2x - 3y + az = 6$$

$$2x - \frac{6}{a} + 6 = 6$$

$$2x = \frac{6}{a}$$

$$x = \frac{3}{a}$$

$$a = \frac{1}{xyz}$$

$$a = 1 : (x \cdot y \cdot z)$$

$$a = 1 : \left(\frac{3}{a} \cdot \frac{2}{a} \cdot \frac{6}{a} \right)$$

$$a = 1 \cdot \frac{a^3}{36}$$

$$36a = a^3$$

$$36 = a^2$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$$

Ответ:

При $a = 6$:

$$x = \frac{3}{a} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2}{a} = \frac{1}{3}$$

$$z = \frac{6}{a} = 1$$

При $a = -6$:

$$x = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2}$$

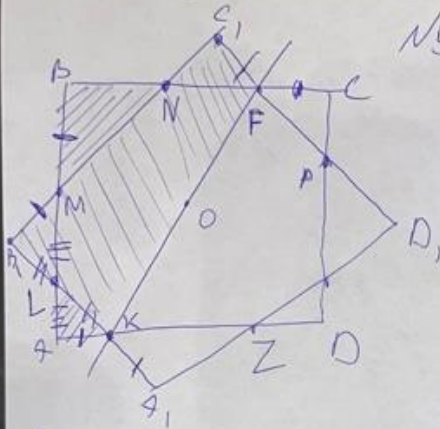
$$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{6}{a} = -1$$

лист 6 из 14

листок №6

Вариант 2



№5

$\triangle LAK$ - прямоугольный
 треугольник. Пусть его
 сторона $AK = x$.
 $\triangle LAK = \triangle BMN = \triangle FCP = \triangle LP, M =$
 $= \triangle NC, F = \triangle KAT \Rightarrow AK = KA1 =$
 $= B, M = BM = C, F = FC = x$

И так, площадь искомого фигури равна
 сумме площадей прямоугольника BC, FK ,
 прямоугольного треугольника BMN и
 прямоугольного треугольника LAK .

Пусть a - сторона квадрата. Тогда $S_{\triangle BC, FK} =$
 $= \frac{(x+a-x)}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$

$S_{\triangle LAK} = LA + AK + LK = AL + LM + MB = a$

$S_{\triangle LAK}$ должна быть максимальной. Наибольшая
 площадь у прямоугольного треугольника с
 известным периметром будет при наибольшем
 радиусе вписанной окружности. При том радиусе
 вписанной окружности максимален касание
 с вписанной окружностью.

лист 7 из 14

Источники 17

Вариант 2

Если радиусы больше, то окружности пересекаются, что невозможно. Следовательно ~~треугольник~~ ~~равнобедренный~~.
Следовательно $\angle AKL = 45^\circ \Rightarrow \angle B, LF = \frac{180 - 45}{2} = \frac{135}{2} = 67,5^\circ$

Следовательно $AB = 2x + x\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$

$S_{\Delta ALK} = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{4}$

Следовательно исходная площадь равна:

$$\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^2 + a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2} =$$
$$= \frac{a^2 + 3a^2 - 2a^2\sqrt{2}}{2} = 2a^2 - 2a^2\sqrt{2} = a^2(2 - 2\sqrt{2})$$

$a^2 = 17$ (по условию) \Rightarrow исходная площадь равна $17(2 - 2\sqrt{2})$

Ответ: $17(2 - 2\sqrt{2})$

Учет 84344 Купчик №1

Все ^{групповые} леса в последовательности 20112...

с 20 го 99 занимают 80.2 = 160 мест.

Остаточные ~~до~~ 2011-160 = 1861 занимают
при значимых лесах на 1860 ^{местах} размещившеь

Леса с 100 до 1860 $f: 3 + 100 - 1 = 720 - 1 = 719$.

Леса с 100 до 719 занимают первую
1860 мест, следовательно первая ~~группа~~

группа, леса, последующего за 719

стоят на 1861 месте. Значит, на 1861

месте стоит первая группа леса 720,
что получается 7.

Ответ: 7

учем § 14 Значение $\sqrt{2}$
 $|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$
 ОДЗ: $x \in [-1; 1]$

Пусть $b = -1$:

$$|x| - \arcsin x - \arccos x - |x| + 1 + a = 0$$

$$a + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$a = \frac{\pi}{2} - 1$$

Пусть $a = \frac{\pi}{2} - 1$ значение ~~$(\arcsin x + b \arccos x)$~~

$$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

Имеем одно или корней $x=1$ при
любом значении b .

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$

участков 10 и 14 репродукции

$$2 \log_2(x^2-3) = \log_2(x^2-2)$$

$$(x^2-3)^{\log_2 2} = 2 \log_2(x^2-2)$$

Ищем $t = x^2-3$; $d = \log_2 2$, ~~и т.д.~~

тогда $2 \cdot (t+1)^d = t^d$ ($d < 1$)

$$(t^d)' = d t^{d-1} = \frac{d}{t^{1-d}} \Rightarrow \text{убывает}$$

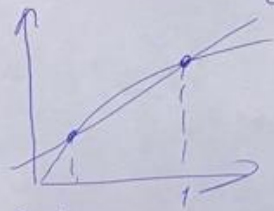
конечно беря, ~~и т.д.~~
производная монотонно уменьшается.

Ищем $f(t) = (t+1)^d$; $g(t) = t^d$, тогда

$$f(0) = 2 \quad g(0) = 0 \Rightarrow f(0) > g(0)$$

$$f(1) = 1 \quad g(1) = 2d \Rightarrow g(1) > f(1)$$

$1 > 2d \Rightarrow \frac{1}{2} > \log_2 2 \Leftrightarrow 0.5 > 1 \Leftrightarrow 0.5 < 1$ верно.



Две монотонно убывающие,
убывающие и пересекаются
(м.к. $x^2-3=t$)

Ответ: 4 корня

система из 3 уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{x}y = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{x}z = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{y}z = 3 \end{cases}$$

Пусть $a = \frac{1}{xy}$, тогда:

$$\begin{cases} 2x - 3y + ay = 6 & \cdot 3 \\ 3z - 6x + ay = 2 & \cdot a \\ 6y - 2z + \frac{ax}{3} = 3 & \cdot 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-3)y + (3a+3)z = 18 \\ (a^2+36)y + (3a-12)z = 20a \\ 2(a-1)y + (3a+3)z = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-3)y + (3a+3)z = 20 \\ (3a-12)z + y(36+a^2) = 18 + 2a \end{cases} \begin{matrix} (a-4) \\ (a+1) \end{matrix} \begin{matrix} (a^2+36) \\ (a-3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} [(a-3)(a-4) - (a+1)(a^2+36)] y = 20(a-4) - 2(a+1)(a-3) \\ [3(a+1)(a^2+36) - 3(a-4)(a-3)] z = 20(a^2+36) - 2(a+1)(a-3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [a^2 - 7a - 36 + 36 - a^3 - 36a - a^2 - 36] y = 20a - 2a^2 - 38 \\ [3(a^3 + 36a + a^2 + 36) - 3(a^2 - 7a + 12)] z = 20a^3 + 720 - 2a^2 - 36a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2 + 48a)y = 2a^2 + 38 \\ (a^3 + 48a)z = 882 + 18a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ay = 2 \\ az = 6 \\ y = \frac{2}{a} \\ z = \frac{6}{a} \end{cases}$$

~~$$(a^2 + 48a)y = 2a^2 + 38$$~~

~~$$a^3y + 48ay = 2a^2 + 38$$~~

~~$$a^3y + 48ay = 2a^2 + 38$$~~

$$* \quad \begin{cases} a^3y + 48ay = 2a^2 + 38 \\ ay = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(a^3 + 48a)z = 882 + 18a^2 \\ 3a(a^2 + 48)z = 18(a^2 + 48) \\ 3az = 18 \\ az = 6 \end{cases}$$

Решите уравнение в логарифмическом виде (2014)

$$2x - 3y + az = 6$$

$$2x - \frac{6}{a} + 6 = 6$$

$$2x = \frac{6}{a}$$

$$x = \frac{3}{a}$$

$$a = \frac{1}{xyz}$$

$$a = 1 : \left(\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{a} \cdot \frac{2}{a} \right)$$

$$a = 1 : \left(\frac{36}{a^3} \right)$$

$$a = \frac{a^3}{36}$$

$$36a = a^3$$

$$36 = a^2$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$$

Ответ:

При $a = 6$:

$$x = \frac{3}{a} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2}{a} = \frac{1}{3}$$

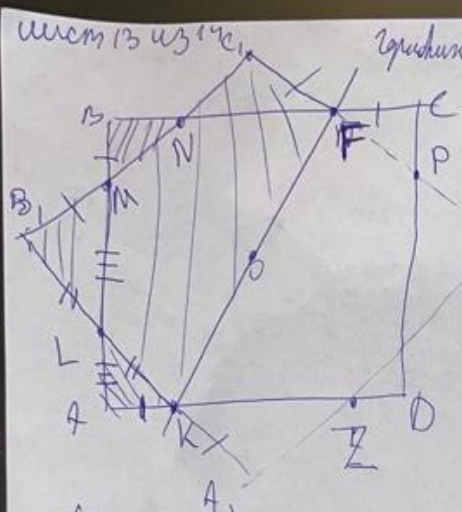
$$z = \frac{6}{a} = 1$$

При $a = -6$:

$$x = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2}{a} = -\frac{1}{3}$$

$$z = \frac{6}{a} = -1$$



$\triangle LAK$ - прямоугольный
 треугольник. Пусть его
 сторона $AK = x$.
 $\triangle LAK = \triangle BMN = \triangle FCP = \triangle LB, M =$
 $= \triangle NC, F \Rightarrow \triangle K A_1 Z \Rightarrow$
 $\Rightarrow AK = KA_1 = B, M = BM = C, F = FC =$
 $= x.$

и так, площадь исходной фигуры равна
 сумме прямоугольной трапеции B, C, FK и
 прямоугольного треугольника BNM и прямоугольного
 треугольника LAK

Пусть a - сторона квадрата. $\Rightarrow S_{\square B, C, FK} =$
 $= \frac{(x+a-x) \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\square ALK = AL + LK + AK = AL + LM + MB = a$

$\square ALK$ годится быть десятичной.

Наибольшая площадь у прямоугольного треугольника
 с известной гипотенузой будет при наибольшей,
 радиусе, при $\frac{a}{2}$. ~~то есть~~ радиусе вписанной
 окружности по диаметру при касании вписанной
 и вписанной окружностей. ~~Если окружность~~
~~пересекает, то~~ Если радиус больше, то
 окружности пересекаются, что невозможно. Следовательно
 треугольник равен десятичной.

число 14 из 14
 Треугольник с $\angle K = 45^\circ \Rightarrow \angle D, \angle F = \frac{180 - 45}{2} =$
 $= \frac{135}{2} = 67,5^\circ$

Треугольник $AB = \cancel{2x} \cdot \sqrt{2}$, \Rightarrow
 ~~$2x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot x$~~

$\frac{2 \cdot 12}{57}$

~~$2x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot x$~~

$\Rightarrow x = \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a(2 - \sqrt{2})}{2}$

SD $\triangle LK = \frac{x^2}{2} = \frac{a^2(2 - \sqrt{2})^2}{4} = \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{4}$

Треугольник вписанная площадь паку.

$\frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{4} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2} =$

$= \frac{a^2 + a^2(3 - 2\sqrt{2})}{2} = \frac{a^2 + 3a^2 - 2\sqrt{2}a^2}{2} =$

~~$\frac{17a^2 - 2\sqrt{2}a^2}{2}$~~ $= \frac{4a^2 - 2\sqrt{2}a^2}{2} = 2a^2 - \sqrt{2}a^2 =$

$= a^2(2 - \sqrt{2})$

$a^2 = 12$ (по условию) \Rightarrow ~~площадь~~ площадь вписанной S
 паку $12(2 - \sqrt{2})$

Ответ: $12(2 - \sqrt{2})$