



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

## **ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Миатов Александр Олегович**

Класс: **9**

Технический балл: **60**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике  
2020/2021 учебный год  
Заключительный этап

ФИО участника: Миатов Александр Олегович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Сумма*
15 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	5 баллов	0 баллов	10 баллов	60 баллов

\*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

числовик №1 из 3

№1

Всего вариантов  $2^{2021}$  (либо опра либо решит на конкретный вопрос).  
Вариантов, число которых равно 0 опра  $C_{2021}^0$ , число 2 опра  $C_{2021}^2$   
и т.д. Знаем всевозможных вариантов  $(C_{2021}^0 + C_{2021}^2 + \dots + C_{2021}^{2020})$   
 $= 2^{2020}$ . Знаем какая вероятность равна  $\frac{2^{2020}}{2^{2021}} = \frac{1}{2}$

Ответ:  $\frac{1}{2}$ .

№2

Путь от пункта А до пункта В равен  $t$  км, и если со скоростью  $25 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ , тогда путь составляет  $25 \cdot t$  км. Путь на  $(x \cdot 100 - 1)\%$  от расстояния был увеличен скоростью, тогда:  
 $(x - 1) \cdot 100\%$

$$\begin{cases} 1,6 \cdot 25 \left( t - \frac{13}{12} \right) = 25 \cdot t \\ 25 \cdot t = x \cdot 25 \left( t - \frac{2}{3} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{13 \cdot 1,6}{12 \cdot 0,6} = \frac{26}{9} \\ x = \frac{t}{t - \frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{26}{9} \\ x = \frac{26}{9 \cdot \frac{20}{9}} = \frac{13}{10} = 1,3 \end{cases}$$

Знаем на 30% от расстояния был увеличен скорость

Ответ: на 30%.

Умножим 2 и 3

№4

Поскольку нам даны 3 неизвестных, то мы можем составить граф (где вершины - государства, а ребра - границы).

Значит нам надо выбрать наибольшее число ребер, которое равно  $n \cdot (n-1)$  (где  $n$  - кол-во государств в одной зоне)  $= n^2 + 20n$  (это парадокс с ветками втуз, значит максимум достигается в вершине, при  $n = \frac{-20}{-2} = 10$ )  
Значит рукопожатий было  $10 \cdot 10 = 100$  (не более)

Примером является самый граф с вершинами 10 вершинами в каждой зоне.

Ответ: 100 рукопожатий.

№4

$$(x-2020)P(x+1) = (x+2021)P(x)$$

~~Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - все корни многочленов  $P(x)$  и  $P(x+1)$ .~~

Заметим, что 2020 является корнем  $P(x)$ , а число -2021 корнем  $P(x+1)$ , значит  $P(-2020) = 0$ , но т.к.  $P(-2020) = 0$ , то  $P(-2019) = 0$  и т.д. до 2020. Пусть  $P(a) = 0$ , тогда если  $a \neq 2020$ , то  $P(a+1) = 0$ , теперь рассмотрим  $a+1$  вместо  $a$ , и  $a$  снова если  $a+1 \neq 2020$ , то  $P(a+2) = 0$ , так продолжим операцию пока  $a+k \neq 2020$ , если при  $a+k = 2020$

$P(a+k+1) = 2020$ , то мы можем продолжать операцию, и найдем, что  $P(a) = P(a+1)$  всегда, но у многочлена конечно много корней, если это не конг. разл. - противоположные. Аналогично если  $a+k = -2021$ . Значит корни  $P(x)$  - последовательные целые числа от -2020 до 2020. Ответ: 4041.  
или  $2 \cdot 2020 + 1 = 4041$

Умножи 3 на 3

N 3

$$\frac{100}{101} \dots \frac{1022}{1023} > \frac{5}{16}$$

$$\frac{100}{1023} > \frac{100}{1024} = \left(\frac{5}{16}\right)^2$$

$$\frac{5}{16} \cdot \frac{102}{101} \cdot \frac{104}{103} \dots \frac{1022}{1021} > 1$$

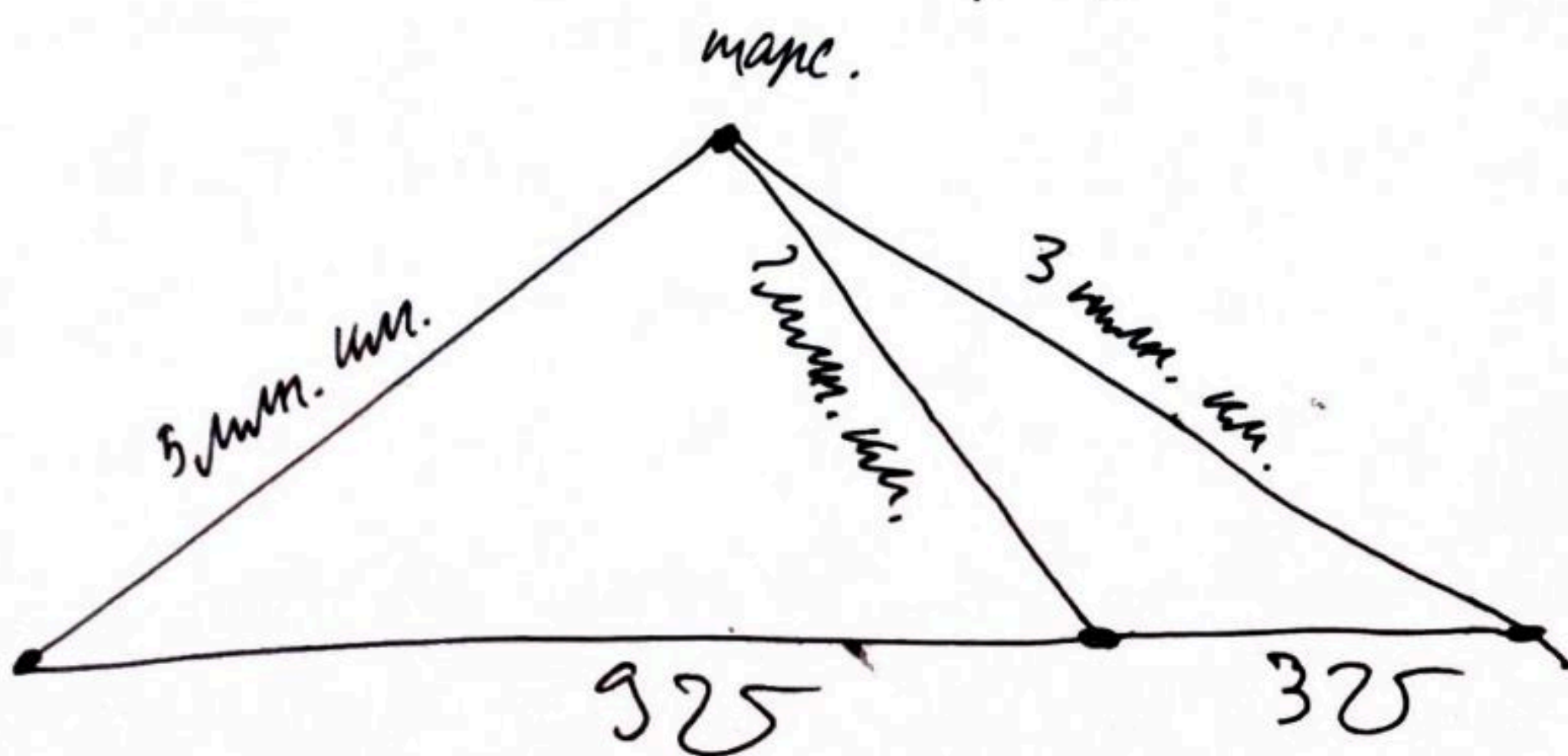
...

N 5

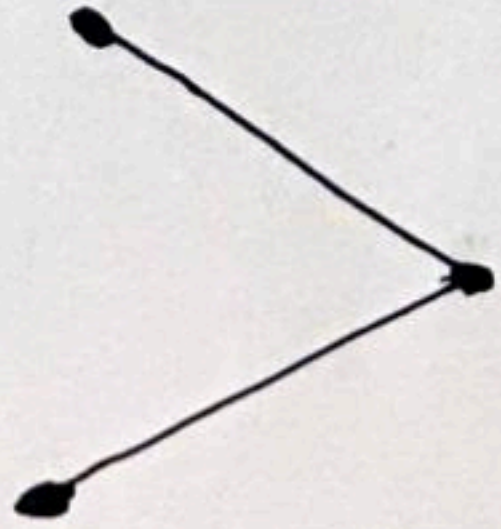
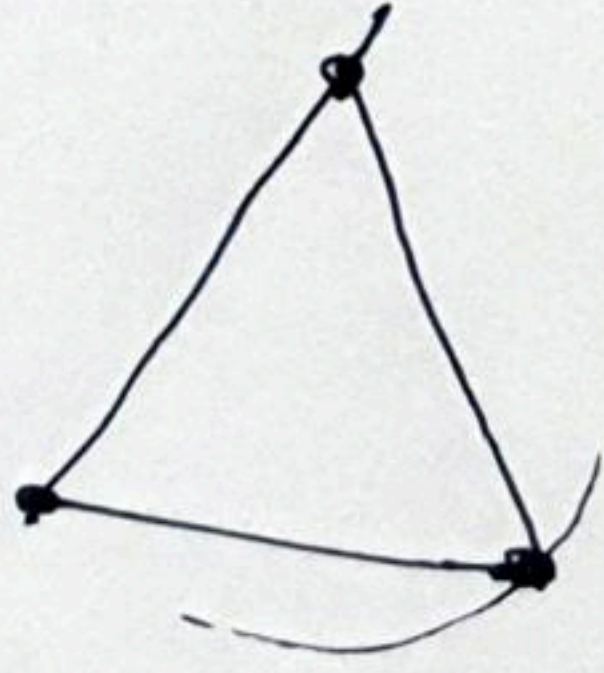
Для некоторых двух натуральных чисел  $n$  и  $k$  не более 2 делителей, наименьшее деление  $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ .

Ответ: 20 делителей.

N 6



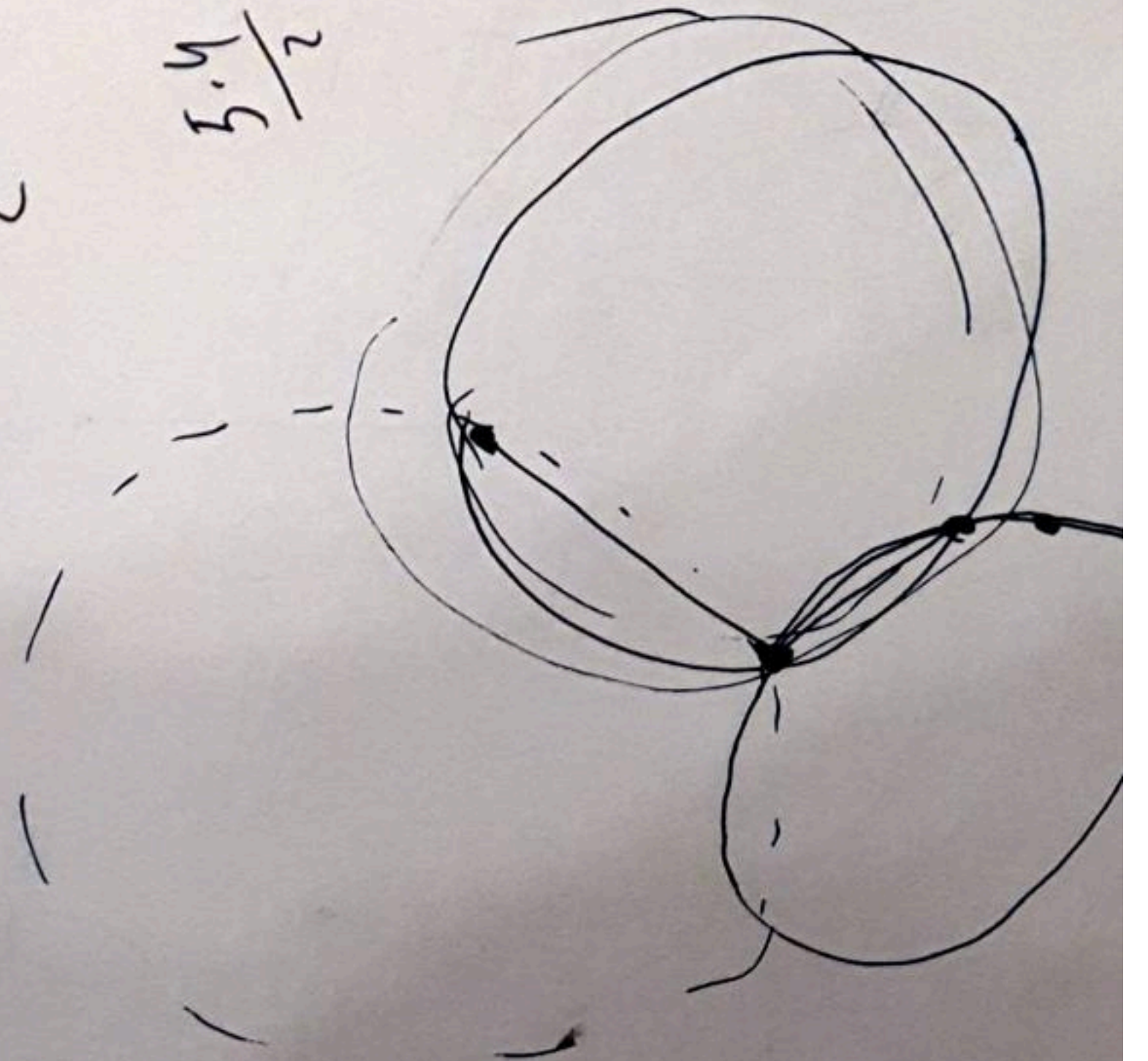
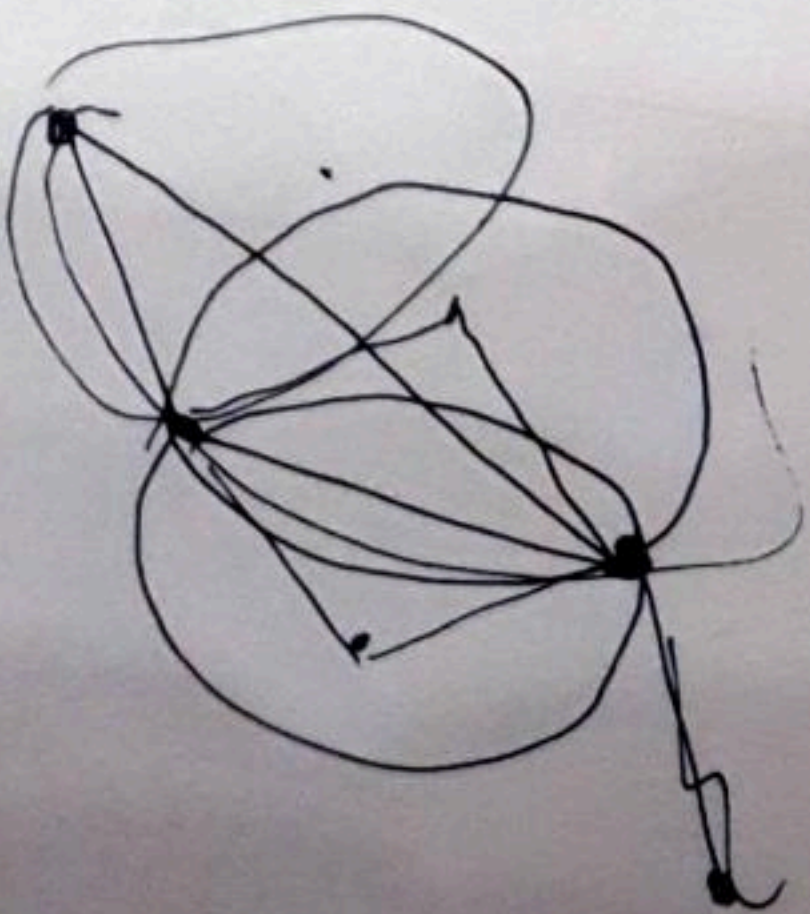
Упробна 1 уз 6



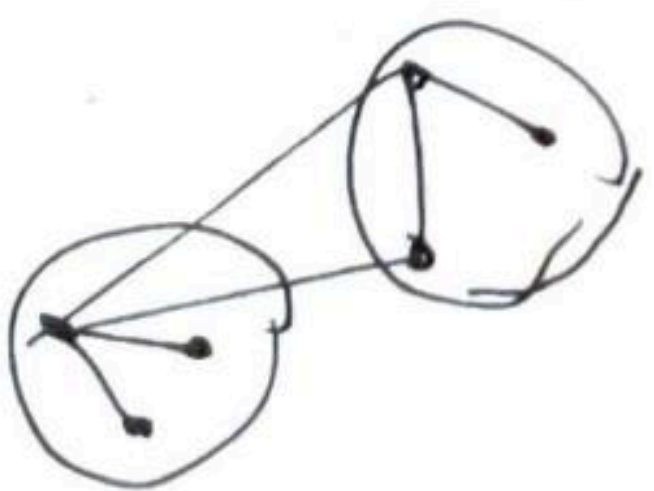
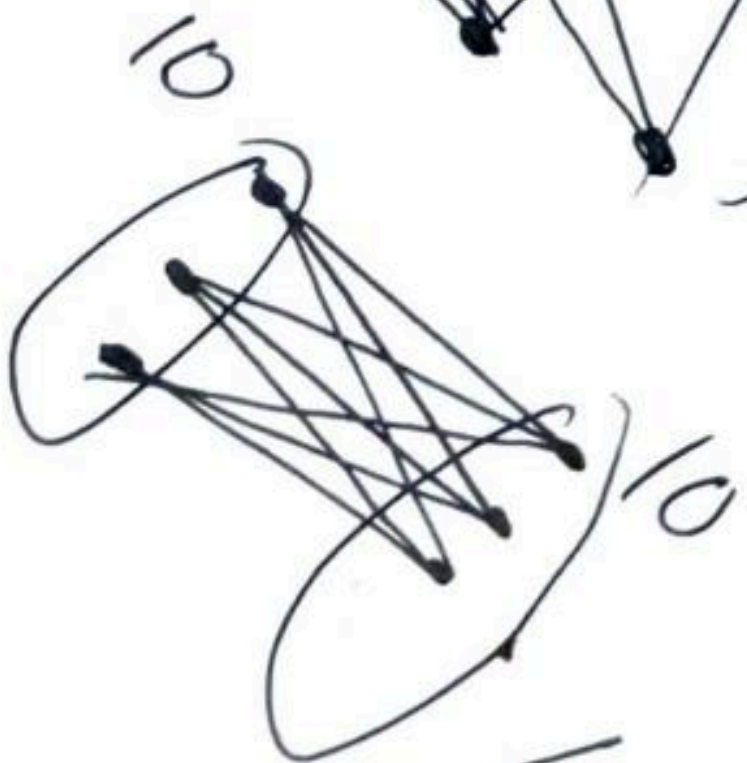
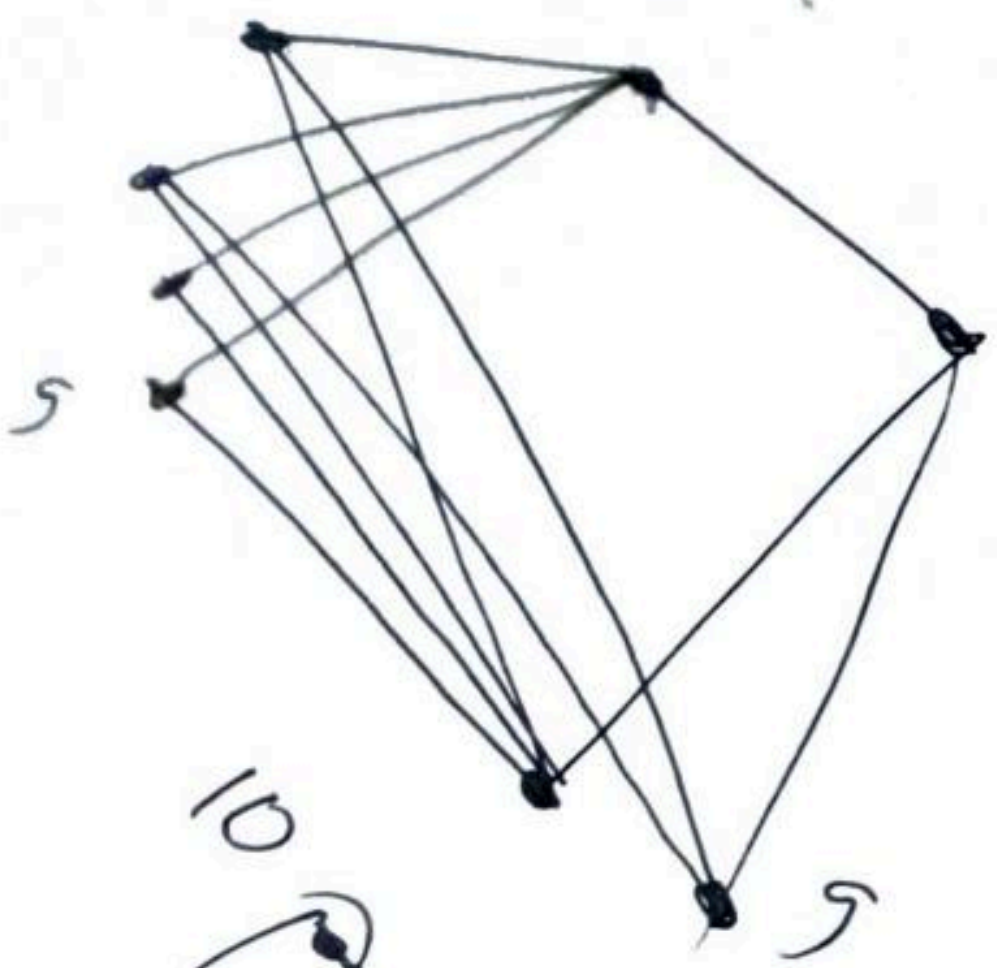
5

$$02 = 2 \cdot \frac{2}{4 \cdot 4}$$

2

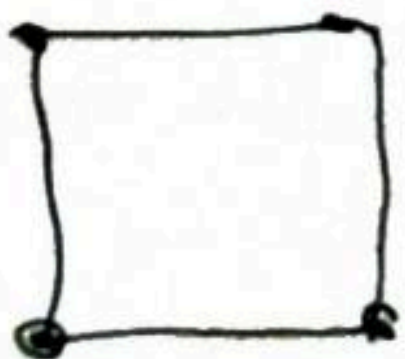
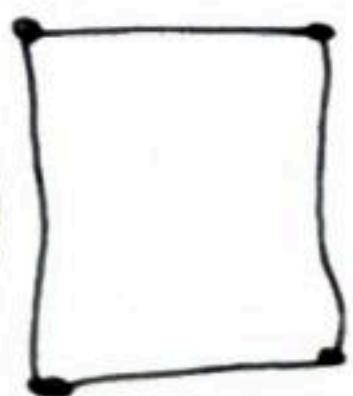
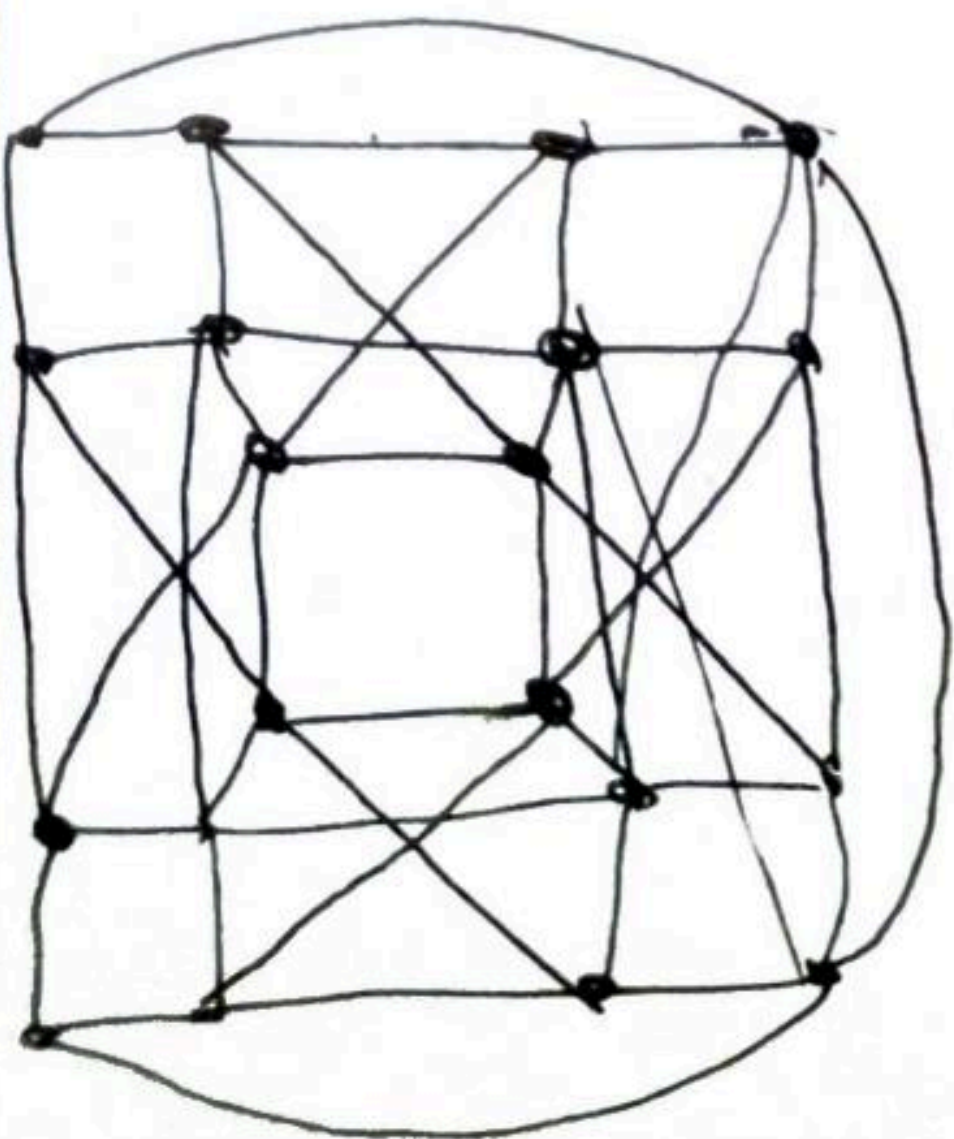


Меридиан 2036



$$\frac{n^2 - 1}{4} + n = \frac{n^2 + 4n - 1}{4}$$

$$10 \cdot 10 = 100$$



$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

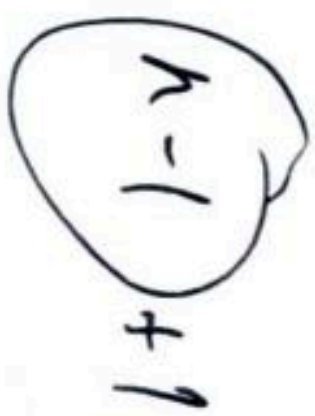
$$7 \cdot 4 + 8 = 32$$

$$4 \cdot 8 + 8 = 56$$

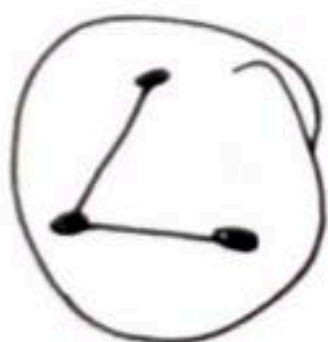
$$60$$

А

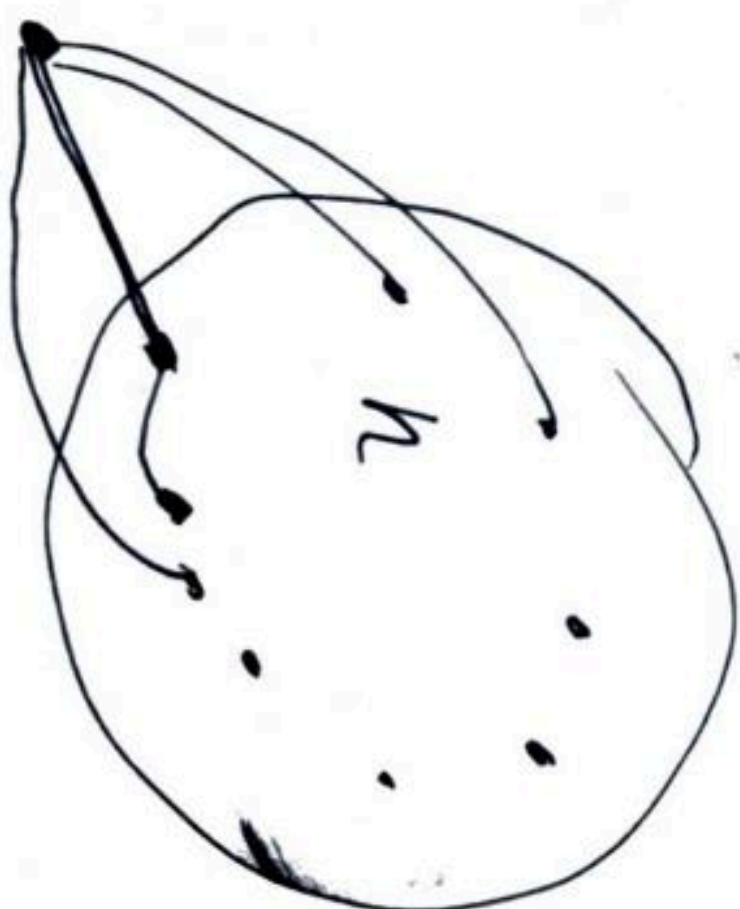
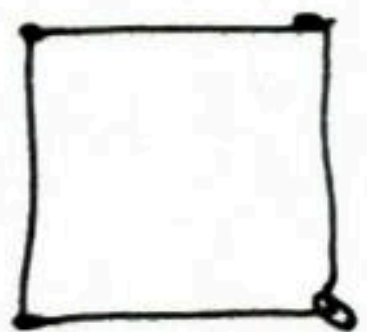
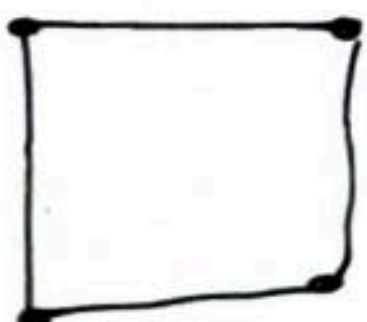
2



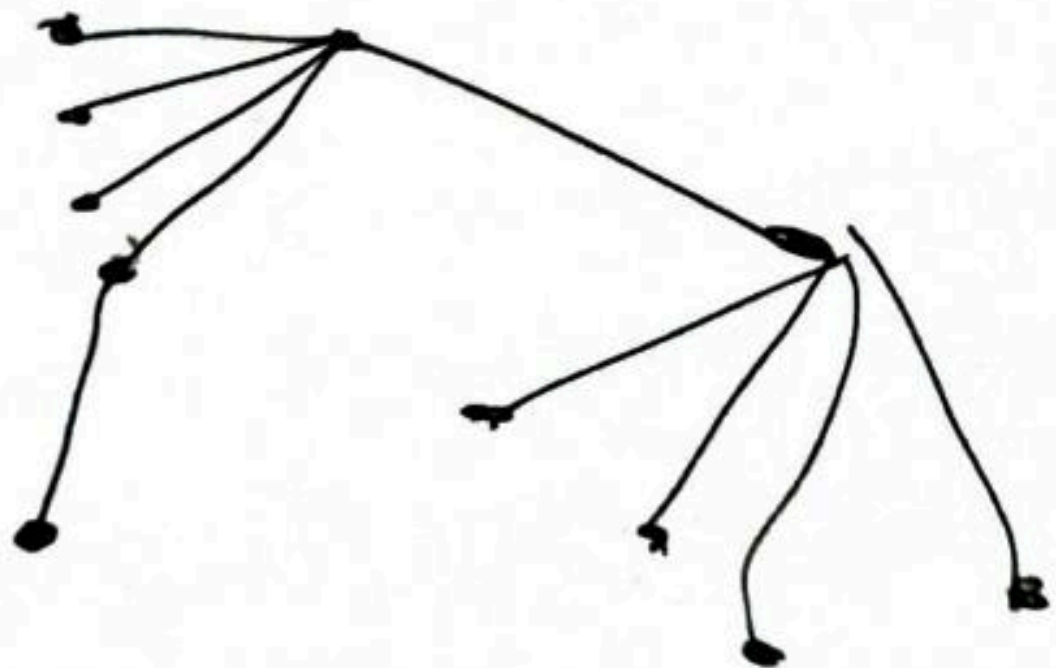
$$\frac{(n-1)}{4} \left( \frac{n+1}{4} + 1 \right) =$$



$$16 + 4 = 20$$



$$\frac{(n+1)(n-1)}{4}$$



$$\frac{(n+1)(n-1)}{4}$$

mem n

$$\frac{(n+2)(n-2)}{4}$$

mem n

Memorandum 2036

Memorandum 3036

$$\begin{aligned}
 & 256 - 128 + 1 = 12864 \\
 & \frac{256 - 128 + 1}{2} = 12864 \\
 & \frac{2^8 - 2^7 + 1}{2} = 2 \\
 & \frac{2^9 - 2^8 + 1}{2} = \frac{2^8(2-1)}{2} = \frac{128 - 101 + 1}{2} = 14 \\
 & \frac{2^9 - 2^8 + 1}{2} = \frac{2^8(2-1)}{2} = \frac{128 - 101 + 1}{2} = 14
 \end{aligned}$$

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \dots \frac{1070}{1071} \cdot \frac{1072}{1073}$$

$$\frac{1073 - 100 + 1}{2} = \frac{973 + 1}{2} = 487$$

$$(2^6)^{462}$$

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \dots \frac{1072}{1073}$$

$$(2^7)^{14} \cdot (2^8)^{64} \cdot (2^9)^{128} \cdot (2^8)^{256}$$

$$\frac{974}{2} = 487$$

190

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{214}{214}$$

$$\begin{aligned}
 & 3810 \\
 & - 462 \\
 & \hline
 & 3348
 \end{aligned}$$

$$(2^{10})^{462}$$

$$5 \cdot 675 = 3375$$

$$(2^{462}) \cdot 50 \cdot 51 \dots 511$$

$$\begin{aligned}
 & 178 \\
 & \times 9 \\
 & \hline
 & 1602 \\
 & + 16020 \\
 & \hline
 & 15810
 \end{aligned}$$

$$175 - 50 + 1 = 126$$

$$\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x+3}\right)$$

$$(2^{3810})$$

$$50 \quad 175$$

$$1072$$

$$\begin{aligned}
 & 101 - 702 \\
 & \hline
 & -601 \\
 & 511 - 1072 \\
 & \hline
 & -561
 \end{aligned}$$

$$\frac{1073 - 702 + 1}{2} = \frac{372}{2} = 186$$

$$(5^2)^{76} \cdot (5^3)^{386}$$

$$2^{411} \cdot \frac{100}{513} \cdot \frac{102}{1023} \dots \cdot 200$$

$$\frac{5^{1310}}{2^{3348}} > \frac{5}{16} = \frac{5}{2^4}$$

$$\begin{aligned}
 & 511 \\
 & - 125 \\
 & \hline
 & 386
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 511 \\
 & + 386 \\
 & \hline
 & 897
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 1138 \\
 & + 152 \\
 & \hline
 & 1290
 \end{aligned}$$

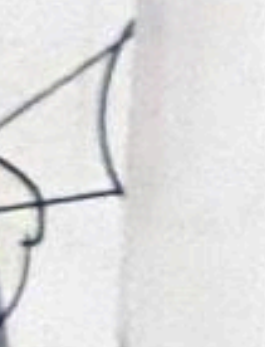
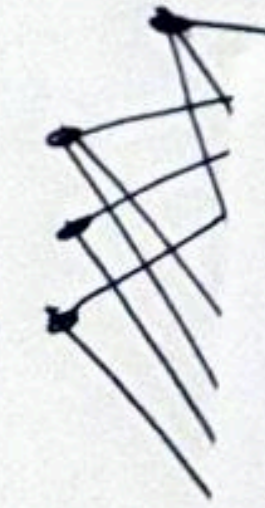
$$5^{1309} > 2^{3344}$$

48+8=56



$\left(\frac{1204}{4} \dots\right)$

Мерма Меромин буга



3

5

$\left(\frac{1}{2}\right)$

50

175

$(5^2)$

511  
725  
886

152

511  
386  
3

1138  
+ 152

2 3348  
1209

16 29

Меридиан 5 из 6

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{104}{105} \cdot \frac{106}{107} \dots \frac{1022}{1023} \cdot \frac{5}{16}$$

$$\frac{1024}{338} = \frac{1022 - 338 + 2}{2} = \frac{1024 - 338}{2} = \frac{686}{2} = 343$$

$$\frac{16}{5}$$

$$16 \cdot 8 = 128$$

$$16 \cdot 7 = 112$$

$$5 \cdot 4$$

$$5 \cdot 21 = 105$$

$$16 \cdot 71 = 336$$

$$\frac{32}{336}$$

$$\frac{336}{105}$$

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y+1}{y} \cdot \frac{y+3}{y+2} \cdot \frac{y+1}{y+2}$$

$$\rightarrow (xy + 2x + y + 2)y =$$

$$\frac{106}{104} \cdot \frac{338}{334} \cdot \frac{340}{339}$$

$$\frac{1002}{1001}$$

$$\frac{102}{101} \cdot \frac{104}{103} \cdot \frac{106}{105} \cdot \frac{108}{107} \dots \frac{334}{333} \cdot \frac{338}{337}$$

$$\frac{102}{102}$$

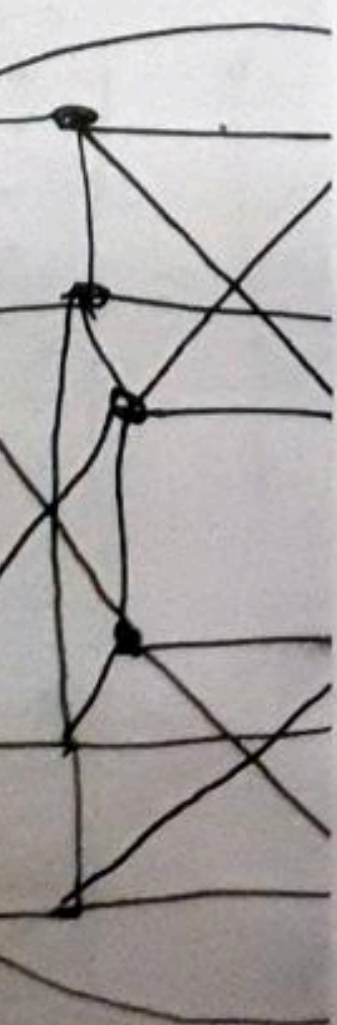
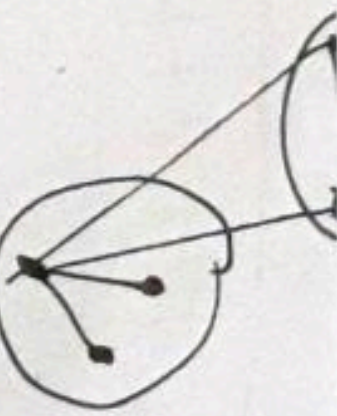
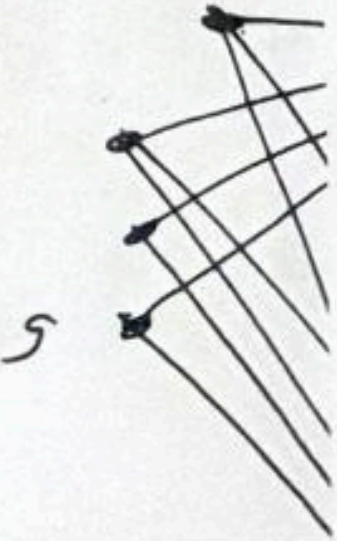
$$\frac{3344 - 10644 + 1}{2} = \frac{336 - 106}{2} = \frac{230}{2} = 115$$

$$\frac{1077}{1071}$$

$$\frac{x^{y+1} \cdot y^{x+1}}{(x+1)y} = \frac{xy+x}{xy+y}$$

$$x < y$$

Меридиан



48 + 8 = 56

$$\frac{125}{86}$$

3348

чепи Мпробум: 436

$$\frac{32}{336}$$

$$\frac{2(1+x)^2}{2(1+x)^2}$$

$$\frac{101}{5}$$

$$\frac{101}{15 \cdot 2}$$

$$\frac{101}{101}$$

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103}$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)$$

$$1 < \frac{5}{16} \cdot \left(1 + \frac{1}{101}\right) \left(1 + \frac{1}{103}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{1021}\right)$$

$$< 5 \cdot 102 \cdot 104 \cdot 106 \dots 1022$$

$$16 \cdot 101 \cdot 103 \dots 1021 >$$

$$1 + \frac{1}{x+2} < 1 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{x}{x+2} > \frac{x}{x+1}$$

$$\frac{101}{103} < \frac{101}{101}$$

$$\frac{1022}{191} > \frac{91}{16}$$

2.5

$$\frac{100}{1023} > \frac{5}{16}$$

$$\frac{5115}{5115}$$

$$1600 - 5115 = 3515$$

$$1023 - 1021 = 2$$

$$= \frac{3515}{2} = 1757.5$$

$$\frac{4 \cdot 25}{4 \cdot 256}$$

$$\frac{1201}{2201} \cdot \frac{1022}{101}$$

$$\frac{104}{101} \cdot \frac{101}{101}$$

$$\frac{102}{101} \cdot \frac{101}{101}$$

$$\frac{101}{101} \cdot \frac{101}{101}$$

$$\frac{101}{101} \cdot \frac{101}{101}$$

$$\frac{101}{101} \cdot \frac{101}{101}$$

$$\frac{5}{8}$$

$$\frac{1022}{2201}$$

$$\frac{1021}{1021}$$

$$\frac{1021}{2201}$$

$$\frac{1021}{1021}$$

$$\frac{1021}{1021}$$

$$\frac{1021}{1021}$$

$$\left(\frac{5}{16}\right)^2$$

$$\frac{1022}{2201}$$

$$\frac{1021}{1021}$$

$$\frac{1021}{1021} \cdot \frac{104}{103}$$

$$\frac{1021}{1021} \cdot \frac{104}{103}$$

$$\frac{1021}{1021} \cdot \frac{104}{103}$$

$$\frac{1021}{1021} \cdot \frac{104}{103}$$

$$101 < 102$$

$$103 < 104$$

$$\frac{5+x}{x+5} = \frac{5(1+x)}{x+5}$$

$$1021$$

8 > x