



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Нураев Тимур Талгатович**

Класс: **7**

Технический балл: **70**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Нураев Тимур Талгатович

Класс: 7

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 | Задача 6 | Задача 7 | Сумма* |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 15 баллов | 15 баллов | 0 баллов | 5 баллов | 10 баллов | 10 баллов | 15 баллов | 70 баллов |

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

СТР 1

№ 5

Всех этих людей можно представить в виде графа, в котором ~~вершины~~ соединяют знакомых людей.
ребра

Так как нет троек попарно-знакомых, то это ~~граф-дерево~~ ^{двудольный граф}.

Так как нас интересует максимально возможное кол-во рукопожатий, то это должен быть полный ~~граф~~ ^{двудольный граф}. А количество ребер в таком графе это $n \cdot m$, где n - число вершин в первой доле, m - во второй; по условию $n + m = 20 \Rightarrow n = 20 - m$.

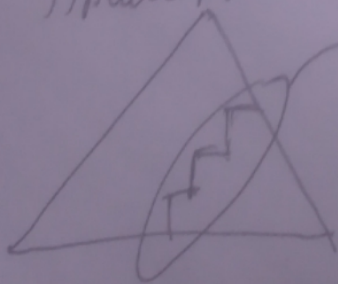
Число ребер: $m(20 - m) = \max$

$m(20 - m)$ можно представить как $(10 + a)(10 - a)$, где $a \in \mathbb{Z}$; ~~и~~ $0 \leq a \leq 10$; a - какое-то число; потому что одно из чисел m и $20 - m > 10$, (либо они оба равны 10), и если $m = 10 - a$, то $20 - m = 20 - 10 + a = 10 + a$, а если $m = 10 + a$, то $20 - m = 20 - 10 - a = 10 - a$, и $m(20 - m) = (10 + a)(10 - a) = 10^2 - a^2 = 100 - a^2$

$a^2 \geq 0 \Rightarrow 100 - a^2 \max$ при $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, значит ~~и~~ $m = 10$; $20 - m = 10$. Ответ: 100.

№ 7

Пример:



Ответ: да;

здесь ломаная ~~из 2019~~ в которой 2019 вершин, каждая вершина создает один угол для каждого из двух многоугольников, то есть всего 2019 углов, но в левом многоугольнике дополнительно 2 угла, а в правом один. Всего в левом - 2021 угол, в правом - 2020

СТР 2

№ 6

Для одной пары мальчиков А и В^{на расстоянии 5 м} есть только две девочки С и D потому что $\triangle ACB$ и $\triangle DAB$ — равнобедр., так как по усл. $AC = CB = AD = DB = 5$ м, если бы была ещё какая-то девочка на расстоянии 5 м, то была бы ещё одна треугольник, у которого сторона AD и ещё 2 стороны по 5 м, этот треугольник по III признаку равен $\triangle ACB$, уны при основании равны^{у этих \triangle} и тогда эта третья девочка стояла бы там же где одна из двух других.



Всего пар мальчиков $\frac{5 \cdot (5-1)}{2} = 10$, а всего девочек может быть $10 \cdot 2 = 20$.
 Ответ: 20.

№ 1

$$9A = a; 2018 = b$$

$$\begin{aligned} & a(a-2)(a+4) + b(b+2)(b-4) = (a^2 - 2a)(a+4) + (b^2 + 2b)(b-4) = \\ & = (a^3 + 2a^2 - 2a) + (b^3 - 2b^2 - 2b) = a^3 + b^3 + 2a^2 - 2b^2 - 2a - 2b = \\ & = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2(a^2 - b^2) - 2(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + \\ & + 2(a-b)(a+b) - 2(a+b) : (a+b) = 2017 \end{aligned}$$

$$a+b = 2018 + 9 = 2027 \quad \text{Ответ: составное}$$

Стр 3

№2

t - время в к-ве он проснулся

v - его обычная скорость км/ч; X - скорость, к-ой он должен был ехать, чтобы прибыть в 9:00 км/ч

$$(9t - t) \frac{v_{км}}{ч} = S_{км} \text{ - весь путь}$$

$$\left(9 \frac{55}{60} t - t + \frac{40}{60} t\right) \cdot \frac{16}{10} \frac{v_{км}}{ч} = S_{км}$$

$$\left(7 \frac{55}{60} t - t\right) \frac{16}{10} \frac{v_{км}}{ч} = S_{км}$$

$$\frac{19}{3} \frac{55}{60} \cdot \frac{16}{10} \frac{v_{км}}{ч} - \frac{16}{10} t \frac{v_{км}}{ч} = S_{км}$$

$$\frac{38}{3} v_{км} - \frac{16}{10} t \cdot v = 9 v_{км} - t v_{км}$$

$$3 \frac{2}{3} v_{км} = \frac{6}{10} t v_{км}$$

$$t = \frac{11}{3} \cdot \frac{10}{6} t = \frac{110}{18} t = 6 \frac{1}{9} t$$

$$\left(9 - 6 \frac{1}{9}\right) t v = 2 \frac{2}{9} v_{км} \text{ - весь путь}$$

$$\left(6 \frac{1}{9} + \frac{40}{60}\right) t = 6 \frac{7}{9} t \text{ - он проснулся сегодня}$$

$$9t - 6 \frac{7}{9} t = 2 \frac{2}{9} t$$

$$2 \frac{2}{9} x = 2 \frac{2}{9} v$$

$$\frac{20}{9} x = \frac{26}{9} v$$

$$x = \frac{26}{20} v = 1 \frac{3}{10} v$$

$$\frac{1 \frac{3}{10} v}{v} \cdot 100 - 100 = 30\%$$

на
ответ: 30%

УРЧ

№ 4

докажем что $\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1}$, если $a < b$

$$\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1) - b(a+1)}{b(b+1)} = \frac{ab+a-ab-b}{b^2+b} = \frac{a-b}{b^2+b} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b}, \text{ при } a < b.$$

Поделим обе части неравенства на 2

$$\frac{50}{101}, \frac{51}{103}, \dots, \frac{510}{1021}, \frac{511}{1023} > \frac{\sqrt{5}}{32}$$

Если в левой части неравенства ~~каждую~~ каждую дробь к числителю и знаменателю прибавить 1, то по доказанному неравенству ~~для~~ каждая дробь увеличится \Leftrightarrow всё произведение увеличится и станет равным

$$\frac{51}{102} \cdot \frac{52}{104} \dots \frac{511}{1022} \cdot \frac{512}{1024} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(512-51+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{462} =$$

$$= \frac{1}{2^{462}} < \frac{\sqrt{5}}{32} \Leftrightarrow \frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{104}{105} \dots \frac{1020}{1021} \cdot \frac{1022}{1023} > \frac{\sqrt{5}}{16}$$

$$\frac{100}{101}$$

Упростим.

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{101+1}{103} \cdot \frac{103+1}{105} \cdot \frac{105+1}{107} \dots \frac{1021+1}{1023}$$

$$\frac{100}{1021} \cdot \frac{101}{103} \cdot \frac{100}{105} \cdot \frac{1}{107} = \frac{50^3}{51^3}$$

$$\frac{100}{1023} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{101}{105} \cdot \frac{104}{107} \cdot \frac{106}{109}$$

$$\frac{101}{102} = \frac{101}{102}$$

$$\begin{array}{r} 1022 \\ - 100 \\ \hline 922 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 461 \\ \hline 922 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \cdot 962 \\ \hline 101 \cdot 962 \end{array} = \frac{96200}{97162}$$

$$\left(\frac{1000}{10201}\right)^{231} \cdot \left(\frac{100}{102}\right)^{231} = \left(\frac{100}{102}\right)^{231} = \left(\frac{50}{51}\right)^{231}$$

$$17 \frac{11}{12} = \frac{97}{12}$$

$$\begin{array}{r} 132631 \\ \times 51 \\ \hline 132631 \\ \times 51 \\ \hline 663156 \\ \hline 132631 \\ \hline 663156 \\ \hline 132631 \\ \hline 663156 \\ \hline 132631 \\ \hline 663156 \\ \hline 132631 \\ \hline 663156 \\ \hline 132631 \end{array}$$

$$(10-i)(10+i)$$

$$\frac{100 \cdot 102}{101 \cdot 1023}$$

$$110 \overline{) 12}$$

$$t. (9:00-t) v = S$$

~~$$(9:00-t-0:40)$$~~

$$(8:35-t-0:40) \cdot 1,6v = S$$

$$(7:55-t) \cdot 1,6v = S$$

$$(9:00-t) v = S$$

$$\left(7 \frac{55}{60} - t\right) \cdot 1,6v = S$$

$$17 \frac{11}{12} \cdot \left(\frac{95}{12} - t\right) \cdot 1,6v = S = \frac{19}{3} \cdot \frac{2}{3} v - 1,6t v$$

$$9v - tv = 42 \frac{1}{3} v - 1,6tv$$

$$0,6tv = 3 \frac{1}{3} v$$

$$t = \frac{10}{3} \cdot \frac{10}{8} = \frac{100}{24} = 4 \frac{5}{6}$$

$$\frac{19}{3} \cdot \frac{2}{3} v - 1,6t v$$

$$\begin{array}{r}
 63 \\
 + 12 \\
 \hline
 75 \\
 + 126 \\
 \hline
 201 \\
 + 126 \\
 \hline
 327 \\
 + 164 \\
 \hline
 491
 \end{array}$$

Упростите

$$\frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{210 + 10 \cdot 9 \cdot 4}$$

$$\frac{50}{101} \cdot \frac{51}{103} \cdot \frac{52}{105} \dots \frac{511}{1023}$$

$$\frac{a}{b} \sqrt{\frac{a+1}{b+1}}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} \sqrt{a(b+1)}$$

$$\begin{array}{r}
 2020 \overline{) 17} \\
 -14 \\
 \hline
 388
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2018 \overline{) 9} \\
 -18 \\
 \hline
 18
 \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$\frac{101-51}{101} \cdot \frac{51}{103}$$

$$2 \cdot 19 \cdot (2010 - x) + (2017 - x) + (2014 - x) = 4$$

= x

$$\begin{array}{r}
 173 \\
 12 \\
 \hline
 185 \\
 + 126 \\
 \hline
 311 \\
 + 173 \\
 \hline
 484
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 63 \\
 193 \\
 \hline
 256 \\
 + 173 \\
 \hline
 429
 \end{array}$$

$$\frac{19 \cdot 17 \cdot 13}{a}$$

$$\begin{array}{r}
 2014 \overline{) 19} \\
 -19 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 6 \\
 19 \\
 \hline
 25 \\
 + 19 \\
 \hline
 44 \\
 + 19 \\
 \hline
 63 \\
 + 19 \\
 \hline
 82 \\
 + 19 \\
 \hline
 101
 \end{array}$$

$$24 \cdot 22 \cdot 4 = 1996$$

$$100$$

$$9(9-2)(9+4)$$

$$2018(2018+2)(2018-4)$$

$$a(a-2)(a+4) + b(b+2)(b-4)$$

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 22 \\
 \hline
 46 \\
 + 19 \\
 \hline
 65 \\
 + 19 \\
 \hline
 84 \\
 + 19 \\
 \hline
 103 \\
 + 19 \\
 \hline
 122 \\
 + 19 \\
 \hline
 141 \\
 + 19 \\
 \hline
 160 \\
 + 19 \\
 \hline
 179 \\
 + 19 \\
 \hline
 198 \\
 + 19 \\
 \hline
 217 \\
 + 19 \\
 \hline
 236 \\
 + 19 \\
 \hline
 255 \\
 + 19 \\
 \hline
 274 \\
 + 19 \\
 \hline
 293 \\
 + 19 \\
 \hline
 312 \\
 + 19 \\
 \hline
 331 \\
 + 19 \\
 \hline
 350 \\
 + 19 \\
 \hline
 369 \\
 + 19 \\
 \hline
 388 \\
 + 19 \\
 \hline
 407 \\
 + 19 \\
 \hline
 426 \\
 + 19 \\
 \hline
 445 \\
 + 19 \\
 \hline
 464 \\
 + 19 \\
 \hline
 483 \\
 + 19 \\
 \hline
 502 \\
 + 19 \\
 \hline
 521 \\
 + 19 \\
 \hline
 540 \\
 + 19 \\
 \hline
 559 \\
 + 19 \\
 \hline
 578 \\
 + 19 \\
 \hline
 597 \\
 + 19 \\
 \hline
 616 \\
 + 19 \\
 \hline
 635 \\
 + 19 \\
 \hline
 654 \\
 + 19 \\
 \hline
 673 \\
 + 19 \\
 \hline
 692 \\
 + 19 \\
 \hline
 711 \\
 + 19 \\
 \hline
 730 \\
 + 19 \\
 \hline
 749 \\
 + 19 \\
 \hline
 768 \\
 + 19 \\
 \hline
 787 \\
 + 19 \\
 \hline
 806 \\
 + 19 \\
 \hline
 825 \\
 + 19 \\
 \hline
 844 \\
 + 19 \\
 \hline
 863 \\
 + 19 \\
 \hline
 882 \\
 + 19 \\
 \hline
 901 \\
 + 19 \\
 \hline
 920 \\
 + 19 \\
 \hline
 939 \\
 + 19 \\
 \hline
 958 \\
 + 19 \\
 \hline
 977 \\
 + 19 \\
 \hline
 996
 \end{array}$$

$$\frac{101-1}{101} (a+b)$$

$$\frac{103-3}{101 \cdot 101}$$

$$\frac{101-1}{101} \cdot \frac{103-1}{101}$$

$$\frac{101-1}{101} \cdot \frac{103-1}{103}$$

$$\frac{100}{103} \cdot \frac{102}{105} \cdot \frac{1020}{1023} \cdot \frac{102}{101}$$

$$\frac{a(b+1) + (a+1)b}{b(b+1)}$$

$$\frac{ab+a+ab+b}{b(b+1)}$$

$$\frac{512-51}{b(b+1)}$$

$$(a^2 - 2a)(a+4) = a^3 + 2a^2 - 2a$$

$$(b^2 + 2b)(b-4) = b^3 - 2b^2 - 2b$$

$$a^3 + b^3 + 2a^2 - 2a - 2b^2 - 2b$$

Мерзобук

7.9. 19 + 2020.2018.2014

$2020 = 2 \cdot 1010 = 2 \cdot 2 \cdot 505 = 2 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 5$

$2018 = 2 \cdot 1009$

$2014 = 2 \cdot 1007$

~~$\frac{1209}{2} \cdot \frac{17}{24}$~~
 ~~$\frac{1009}{29} \cdot \frac{29}{17}$~~
 ~~$\frac{1007}{91} \cdot \frac{13}{17}$~~

~~$\frac{2020}{11} \cdot \frac{11}{189}$~~
 ~~$\frac{11}{92} \cdot \frac{189}{11}$~~
 ~~$\frac{189}{40} \cdot \frac{11}{1009}$~~
 ~~$\frac{11}{33} \cdot \frac{1009}{17}$~~
 ~~$\frac{1009}{17} \cdot \frac{17}{2013}$~~

~~$\frac{63}{13} \cdot \frac{13}{789}$~~
 ~~$\frac{63}{63} \cdot \frac{789}{19}$~~

~~$\frac{63 \cdot 2}{19} \cdot \frac{17 \cdot 5 \cdot 1}{35} = \frac{10}{2020}$~~
 ~~$\frac{126}{17} \cdot \frac{2020}{100}$~~

~~$219 + 598$~~

~~$\frac{1010}{1185} \cdot \frac{121}{19}$~~
 ~~$\frac{1185}{10} \cdot \frac{19}{1415}$~~
 ~~$\frac{10}{15} \cdot \frac{1415}{19}$~~

~~$\frac{1416}{1010} \cdot \frac{2014}{1415}$~~
 ~~$\frac{1416}{598}$~~

~~$\frac{619}{112} \cdot \frac{112}{193}$~~
 ~~$\frac{112}{29} \cdot \frac{193}{323}$~~
 ~~$\frac{323}{73}$~~

~~$\frac{10}{19} \cdot \frac{29}{35}$~~
 ~~$\frac{69}{129} \cdot \frac{35}{115}$~~
 ~~$\frac{115}{142}$~~

~~$\frac{21}{12} \cdot \frac{12}{126}$~~
 ~~$\frac{126}{174}$~~
 ~~$\frac{174}{2001}$~~

$14 + 19 \cdot 17 \cdot 13$

~~$\frac{969}{2274} \cdot \frac{2274}{999}$~~
 ~~$\frac{999}{14}$~~
 ~~$\frac{14}{4213} \cdot \frac{27}{18}$~~
 ~~$\frac{18}{191}$~~
 ~~$\frac{191}{184}$~~
 ~~$\frac{184}{13}$~~

~~$\frac{510}{2020} \cdot \frac{23}{184}$~~
 ~~$\frac{184}{980}$~~

~~$\frac{191}{2014} \cdot \frac{17}{287}$~~
 ~~$\frac{14}{61} \cdot \frac{36}{54}$~~
 ~~$\frac{54}{49}$~~
 ~~$\frac{49}{5}$~~

~~$\frac{2020}{18} \cdot \frac{6}{376}$~~
 ~~$\frac{22}{18} \cdot \frac{376}{40}$~~
 ~~$\frac{40}{36}$~~
 ~~$\frac{36}{4}$~~

~~$\frac{2016}{176} \cdot \frac{176}{424}$~~
 ~~$\frac{176}{176}$~~

$2 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1009 \cdot 2 \cdot 1007 = 16 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 1009 \cdot 1007$

~~$(a^2+2a)(a+6) + (2p7a+5)(2p7a+9)(2p7a+11)$~~

~~$(a^2+2a)(a+6) = a^3 + 2a^2 + 6a + 12a$~~

~~$\frac{2}{69} \cdot \frac{20}{5040}$~~

$2^4 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 1009 \cdot 1007$

~~$2018 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7 = 16 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 7$~~
 ~~$20 \cdot 9 \cdot 7 = 63 \cdot 80$~~

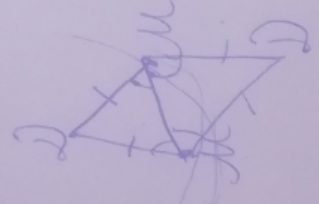
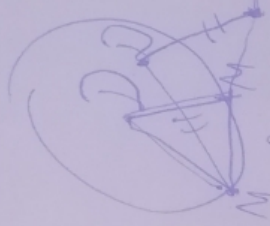
Упроблек

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{104}{105} \cdot \frac{106}{107} \cdot \frac{108}{109} \cdot \frac{110}{111} \cdot \frac{112}{113} \cdot \frac{114}{115} \cdot \frac{116}{117} \cdot \frac{118}{119} \cdot \frac{120}{121}$$

$$\left(1 - \frac{1}{101}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{103}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{121}\right)$$

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{101}{102} \cdot \frac{102}{103} \cdot \frac{103}{104} \cdot \frac{104}{105} \cdot \frac{105}{106} \cdot \frac{106}{107} \cdot \frac{107}{108} \cdot \frac{108}{109} \cdot \frac{109}{110} \cdot \frac{110}{111} \cdot \frac{111}{112} \cdot \frac{112}{113} \cdot \frac{113}{114} \cdot \frac{114}{115} \cdot \frac{115}{116} \cdot \frac{116}{117} \cdot \frac{117}{118} \cdot \frac{118}{119} \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121}$$

$$\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a+2} \cdot \frac{a+2}{a+3} \cdot \dots \cdot \frac{a+n-1}{a+n}$$



$$12 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \ 4 \ 2 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \\ 12 \ 9 \ 4 \ 5 \ 6 \\ \hline 14 \ 6 \ 9 \ 1 \ 2 \ 13 \ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1019 \ 702 \\ 1021 \ 1083 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 359 \\ 297 \\ 261 \\ \hline 2 \ 18 \end{array}$$



$$(10+a)(10-a) = 100 - a^2$$

$$\begin{array}{r} 12 \ 9 \ 12 \ 9 \\ + 2 \ 3 \ 12 \ 9 \ 1 \\ \hline 35 \ 4 \ 9 \ 5 \ 4 \ 13 \ 7 \end{array}$$

