МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Поштаренко Андрей Андреевич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Поштаренко Андрей Андреевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	80 баллов

(4) Чистовик 2В мет В

Замена $t = xyz$

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{z}{t} = 6 \\ -6x + \frac{y}{t} + 3z = 2 \\ \frac{x}{t} + 6y - 2z = 3 \end{cases}$$

Метод Крамера

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} -$$

$$= -\frac{4}{t} - \frac{9}{t} - \frac{36}{t} - \frac{1}{t^3} - 36 + 36 = -\frac{1}{t^3} - \frac{49}{t} = \frac{-(1+49t^2)}{t^3}$$

$$A1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -\frac{1}{6} \\ 2 & \frac{1}{t} & 3 \\ 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{12}{t} - 3^3 + \frac{1}{t}\cdot 2 \cdot 6 - \frac{3}{t^2} - -108 - 12 = -\frac{3(49t^2+1)}{t^2}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{A} = 3t \Rightarrow yz = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3z}$$

Тогда из 3ур: ~~[illegible]~~

$$\frac{6}{3z} - 2z + 3 = 3$$

$$2 = 2z^2$$

$$z = \pm 1$$

$$z = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$z = -1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

из 1ур: $2x - 1 + \frac{z}{t} = 1$

$2x^2 - 7xy + 2 = 0$

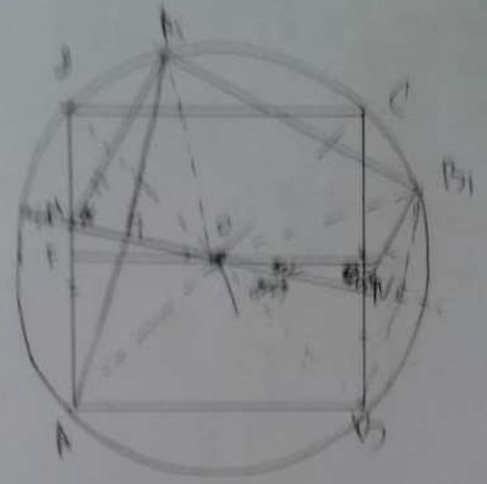
$x = 3$ [illegible]

$x = \frac{1}{2}$

Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1)$; $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -1)$

5

[illegible] 2В 14 лист



∠B

$t = x + 2$ оперниши 2В лист 12

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}\ldots - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= -\frac{4}{t} - \frac{9}{1} - \frac{36}{t} - \frac{1}{t^3} - 36 + 36 = -\frac{1}{t^3} - \frac{39}{t} - \frac{1-49t^2}{t^3}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -\frac{1}{t} \\ 2 & \frac{1}{t} & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -\frac{12}{t} - 3^3 + \frac{1}{t} \cdot 2 + 6 - \frac{3}{t^2} - 108 - 12$$

$$= -147 - 147 - \frac{3}{t^2} = \frac{-3(49t^2+1)}{t^2}$$

$3 - 18 + \frac{1}{3}$

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3t \Rightarrow y_2 = 3 \Rightarrow y_3 = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -1$

$\frac{6}{3x} - 12 x = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{4}$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$

$c = 6t$, $x_1 = \pm\frac{1}{2}$

$x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$

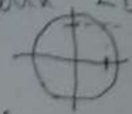
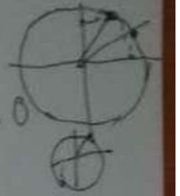
$49 - 4 \cdot 6 = 25$

$x = 3$, $x = 2$

$2x - 1 + \frac{3}{x} = 6$

$\cancel{2x}\ 2x^2 + 3 - 7x = 0$

Черновик 2В | лист

(3)

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$a = \arcsin x - |x| - b(\arccos x + |x| - 1)$

$b = -1$:

$a = \arcsin x - |x| + \arccos x + |x| - 1 = \arcsin x + \arccos x - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$

$\arcsin x - b\arccos x$

(4)

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 9z - 18x + \frac{3}{xz} = 6 \\ 12y - 4z + \frac{2}{yz} = 6 \end{cases}$$

I $2x^2y - 3xy^2 - 6xy + 1 = 0$

$2x^2y - 3x(y^2 + 2y) + 1 = 0$

$D = 9y^2(y+2)^2 - 8y =$

$= y(9y^3 + 36y^2 + 36y - 8)$

Из 3 ур.:

$6y^2z - 2yz^2 - 3yz + 1 = 0$

$6z^2y + 9yz - 18y^2z - 3 = 0$

$(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4$

$f(y) = 9y^3 + 36y^2 + 36y - 8$

$f'(y) = 27y^2 + 72y + 36 =$

$= 9(3y^2 + 8y + 4)$

$y_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{6} = \frac{-4 \pm 2}{3}$

$64 - 16 \cdot 3 = 64 - 48 = 16$

Чистовик 2В 10 лист

Тогда ур-е становится: $(x^2-3)^k - (x^2-2)k = 0$

Пусть $f(x) = (x^2-3)^k - (x^2-2)k$

$f'(x) = k(x^2-3)^{k-1} 2x - 2kx =$

$= 2kx((x^2-3)^{k-1} - 1)$

~~I $k > \sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 3 \geq 1$, а $(x^2-3)^{k-1} - 1 \geq 0$~~

~~При $k < \frac{1}{3}$, то $k-1 < 0 \Rightarrow$ при $x > 2$ $f'(x) < 0$, т.к.~~

Сравним $f'(x)$ с 0:

$2kx > 0$

$f'(x) \wedge 0$.

$2kx((x^2-3)^{k-1} - 1) \wedge 0$.

При $k < \frac{1}{3}$, то $k - 1 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нер-во равносильно:

$-2kx((x^2-3) - 1) \wedge 0$

$-x(x^2-4) \wedge 0$.

При $x \in (-\infty; -2)$ $f'(x) < 0$

$x = -2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$x \in (-2; -\sqrt{3}) \Rightarrow f'(x) > 0$

$x \in (\sqrt{3}; 2) \Rightarrow f'(x) > 0$

$x = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$x \in (2; +\infty) \Rightarrow f'(x) < 0$

~~Значит~~

При этом $f(2) = (4-3)^k - 2k = 1 - 2k > 0$, т.к.

$1 - 2k > 0$

$2k < 1$

$k < \frac{1}{2}$ - верно, т.к. $k < \frac{1}{3}$

Черновик 2В

9 мест

$f(x) = (x^2-3)^k - (x^2-3)k$

$k < \frac{1}{3} \Rightarrow k-1<0$

ОДЗ $|x| \geq \sqrt{3}$

$f'(x) = k(x^2-3)^{k-1} \cdot 2x - 2kx =$

$= 2kx\left((x^2-3)^{k-1} - 1\right)$

$f'(x) = 0$ при $\cancel{x=0}$, $x=2$

при $x>2$ $f'(x)<0$

$x<2$ $f'(x)>0$

$\frac{1}{\log_2 10} < \frac{1}{3}$

$3 < \log_2 10$

$1-2k \geq 0$

$2k \leq 1$

$k \leq \frac{1}{2}$

Чистовик 2В 8 лист

(1) двузначных чисел от 20 до 99 80 штук $\Rightarrow$ 160 цифр. После последнего двузначного идут 2021 − 160 цифр трёх значных чисел.

$2021 - 160 = 1861 = 620 \cdot 3 + 1 \Rightarrow$ в записи встречаются 620 полностью записанных трехзначных и на 2021 месте стоит первая цифра 621 по счету 3ех значного числа. Т.к. первое трехзначное 100, то 621 трехзначное 720, а значит на 2021 месте стоит его первая цифра, то есть 7.

Ответ: 7

(2) $a = \arcsin x - |x| - b(\arccos x + |x| - 1)$

По усл. решения должны существовать при любом b, а значит и при $b = -1 \Rightarrow a = \arcsin x - |x| + \arccos x + |x| - 1$

$= \underbrace{\arcsin x + \arccos x}_{\frac{\pi}{2}} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$

При этом $x = 1$ является при таком a корнем при любом b. Покажем это. Левая часть равна $a = \frac{\pi}{2} - 1$, а правая

$\underbrace{\arcsin(1)}_{\frac{\pi}{2}} - 1 - b(\underbrace{\arccos(1)}_{0} + 1 - 1) = \frac{\pi}{2} - 1$. Верно.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

(3) $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ ОДЗ $|x| > \sqrt{3}$

Т.к. $\lg(x^2-3) = \frac{\log_2(x^2-3)}{\log_2 10}$, а $\lg 2^{x^2-2} = \frac{\log_2 2^{x^2-2}}{\log_2 10}$, то

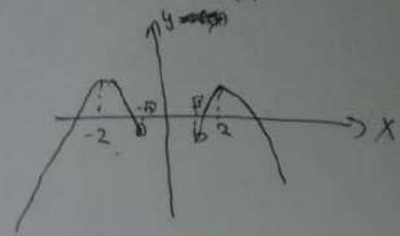
Ур-е равносильно: $(x^2-3)^{\frac{1}{\log_2 10}} = \frac{(x^2-2)}{\log_2 10}$.

Для удобства заменим $\frac{1}{\log_2 10}$ на k, $k < \frac{1}{3}$ т.к. $\frac{1}{\log_2 10} < \frac{1}{\log_2 8} \Leftarrow$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{3}$

Чистовик 2В 11 лист

Значит $f(x)$ имеет вид



и имеет 4 реш.

Ответ: 4 корня.

Черновик 2В 6 лист

$6zy(z-3y) + (49yz-3) = 16zy$

$6z^2y - 18zy^2 + 49yz - 3 - 16yz = 0$

$6z^2y + 33yz - 18zy^2 - 3 = 0$

из 3-го: $6z^2y + 9yz - 18y^2z - 3 = 0$ $\Rightarrow$

$yz = 0$ — противоречие

либо $yz = \frac{3}{49}$

Складываем из 1 и 2-го ур: $\begin{cases} 6x - 9y + \frac{3}{xy} = 18 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 3z - 9y + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{z}\right) = 20$

$3(z-3y) + \frac{(49yz-3)}{2(3z+y)}(3z+y) = 20$

$6zy(z-3y) + 49yz - 3 = 40zy$

$6z^2y - 18y^2z + 9yz - 3 = 0$

из 3-го ур: $6z^2y +$

? $x = \frac{2(y+3z)}{49yz-3}$

Черновик 2В

5 лист

(1) $\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x - 18y + \frac{6}{xy} = 36 \\ 6z - 12x + \frac{2}{xz} = 4 \\ 18y - 6z + \frac{3}{yz} = 9 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{6}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{3}{yz} = 49$

$6z + 2y + 3x = 49xyz$

$\cancel{3x - 49xyz =}$

$49xyz - 3x = 6z + 2y$

$x(49yz - 3) = 6z + 2y$

Если $49yz - 3 \neq 0$! $\Rightarrow x = \frac{6z + 2y}{49yz - 3}$

Тогда $\begin{cases} 6x - 9y + \frac{3}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \end{cases} \Rightarrow 3z - 9y + \frac{3}{xy} + \frac{1}{xz} = 8$

$3(z - 3y) + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{y} + \frac{1}{z}\right) = 8$

$3(z - 3y) + \frac{(49yz - 3)}{2(3z + y)} \frac{(3z + y)}{zy} = 8$

Черновик 2В 4 лист

(1) 90 двузнач
800 однозначн

20 … 99 – 80 двузнач ⇒ 160 цифр

800 3знач ⇒

$$\begin{array}{r} 2021 \\ -\ 160 \\ \hline 1861 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1861 \\ -\ 18 \\ \hline 6 \end{array} \quad \big|\ 3 \quad 620$$

620

$$\begin{array}{r} 620 \\ \times\ 3 \\ \hline 1860 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 160 \\ +\ 1860 \\ \hline 2020 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1861 \\ +\ 160 \\ \hline 2021 \end{array}$$

1 – 100
2 – 101
620 – 719

… 719 720
2020 2021

Ответ: 7

(4)

$12x - 17y$
$62 - 12x$

$$\frac{1}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{3}{xz} = \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{3}{yz} + \frac{2}{xz} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \frac{2}{z}$$

$-4x + 3y + z$

$6x - 9y + \frac{3}{xy} = 18$

3

$3z - 18 + \frac{3}{z} = 2$

$3z^2 - 20z + 3 = 0$

100 – 36 = 264

чернетка 2В $\qquad$ 7 лист

$y=\frac{?}{?}$; $z=1$;

Случай $yz = \frac{3}{49} \Rightarrow 6z+2y=0$

$y=-3z$

$x = \dfrac{6+\frac{?}{3}}{\frac{49}{3}-\frac{9}{3}} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

$\cancel{y}\ -3z^2 = \frac{3}{49}$

$z^2 = -\frac{1}{49} \Rightarrow z \in \varnothing$

Проверка $y=z=1 \Rightarrow x = \dfrac{2\cdot 4}{46} = \dfrac{4}{23}$

~~иначе: $\frac{3}{23} - 3 + \frac{23}{4} = 6$ $(3z+23)^2$~~

Тогда из 2-го и 3-го ур.

$$\begin{cases} 3z - 6\cdot\dfrac{2(3z+y)}{49yz-3} + \dfrac{49yz-3}{2z(3z+y)} = 2 \\ 6y - 2z + \dfrac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

Тогда $\cancel{6z} - \dfrac{24(3z+y)}{49yz-3} + \dfrac{2(49yz-3)}{2z(3z+y)} + 18y - \cancel{6z} + \dfrac{3}{yz} = \cancel{\ \ }\ 13$

$$\frac{2y(49yz-3)^2}{2zy(3z+y)(49yz-3)} - \frac{24(3z+y)^2\cdot 2zy}{2zy(3z+y)(49yz-3)} + \frac{18y^2\cdot 2z(3z+y)(49yz-3)}{2zy(3z+y)(49yz-3)} +$$

$$+ \frac{6(3z+y)(49yz-3)}{2yz(3z+y)(49yz-3)} - \frac{13\cdot 2zy(3z+y)(49yz-3)}{2zy(3z+y)(49yz-3)} =$$

черновик 2В 3лист

$\frac{1}{xy} = a$

$\frac{1}{xz} = b$ $\Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{1 \cdot yz}{xyz} = \frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{yz} = c$

ОДЗ $x^2 - 3 > 0$

3

$2^{\lg(x^2-3)} = \cancel{\log} \lg 2^{x^2-2}$

$\cancel{\log} \log_{10}(x^2-3) = \frac{\log_2(x^2-3)}{\log_2 10}$

$\cancel{\lg} \log_{10} 2^{x^2-2} = \frac{\log_2 2^{x^2-2}}{\log_2 10}$

Замена $\log_2 10 = k$

$3 < \log_2 10 < 4$

$(x^2-3)^{\frac{1}{\log_2 10}} = \frac{(x^2-2)}{\log_2 10}$

Замена $\log_{10} 2 = k$

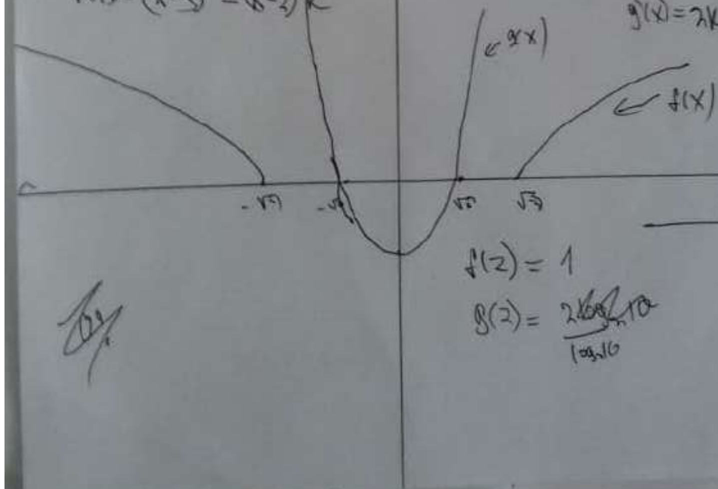
$f(x) = (x^2-3)^k - (x^2-2)k$

$f(x) = (x^2-3)^{\frac{1}{\log_2 10}}$

$g(x) = \frac{(x^2-2)}{\log_2 10}$

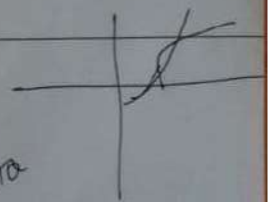
$f'(x) = \frac{1}{k}(x^2-3)^{\frac{1}{k}-1} \cdot 2x$

$g'(x) = 2kx$



$f(2) = 1$

$g(2) = \frac{2}{\log_2 10}$



Чернович 2В 2 лист

$$-16x - 9y + 5z + \frac{1}{xy} + \frac{3}{yz} + \frac{3}{xy} = 18$$

$\frac{1}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{3}{xy} \geq$ $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

II $3z^2x - 6x^2z - 2xz + 1 = 0$

$\cancel{3z^2x} - \cancel{2zx(3}$

$3z^2x - 2zx(3x+1) + 1 = 0$

$$\begin{cases} 6x - 9y + \frac{3}{xy} = 18 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \end{cases}$$

$\cancel{3z + \frac{1}{xy}}$ $3z - 9y + \frac{1}{xz} + \frac{3}{xy} = 20$

$3z(z - 3y) + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{y}\right) = 20$

$2x + \frac{1}{xy} \geq 2\sqrt{\frac{3}{y}}$

III $6y^2z - 2yz^2 - 3yz + 1 = 0$

$2x - 3y + \frac{1}{xy} = 9z - 18x + \frac{3}{xz}$

$20x - 9z - 3y + \frac{1}{xy} - \frac{3}{xz} = 0$

$20x - 3(y + 3z)$