МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гоманюк Илья Александрович**

Класс: **11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Гоманюк Илья Александрович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	5 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	85 баллов

Чистовик 1 В-2

Задание 1

1) • Посчитаем кол-во двухзн. чисел:
20 .... 99 тут 99 − 19 = 80 чисел ⇒ 160 цифр.
• Посчитаем трехзн. числа:
100 .. 999 тут 999 − 99 = 900 чисел, т.е 2700 цифр
Вывод: послед. число в посл-ти трех зн-е

2) • $\underbrace{20\ 21 \ldots 99}_{160 \text{ цифр}}\ \underbrace{100\ 101 \ldots ?}_{2021-160=1861 \text{ цифра}}$

• 1861 = 620 · 3 + 1 ⇒ в посл-ти 620 трехзн. чисел, а ответом явл-ся первая цифра 621 числа.
3) Найдем 620 трехзн. число. 620 трехзн. число явл-ся 620 + 99 = 719-ым натур. числом ⇒ 621-е число 720, его 1 цифра 7

Ответ: 7

Чистовик 2

Задание 3

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

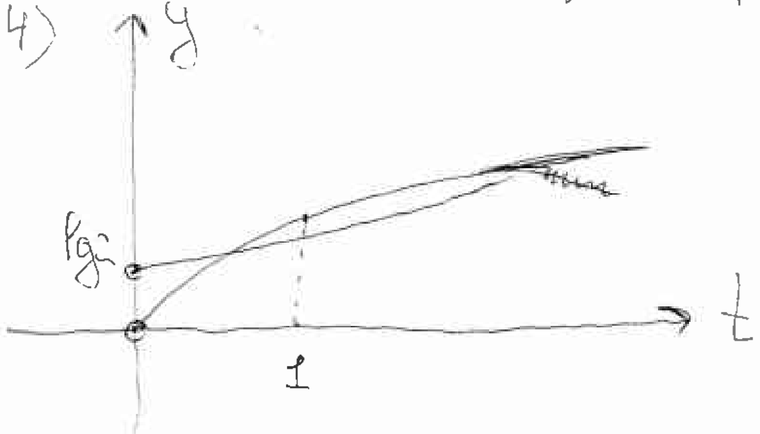
1) ОДЗ: $\begin{cases} x^2-3>0 \rightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty) \\ 2^{x^2-2}>0 \text{ - выполнено} \end{cases}$

2) $(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\cdot\lg 2$

3) Пусть $x^2-3=t$, $t>0$

$t^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$

$f(t)=t^{\lg 2}$ - монотонно возр-я ф-я, выпуклая $\Rightarrow$ может иметь 0, 1, 2 корня с ф-ей $g(t)=(t+1)\lg 2$.

4) 

- $f(0)<g(0)$
  $0<\lg 2$
- $f(1)>g(1)$
  $1^{\lg 2}>2\lg 2$
  $1>\lg 4$

Из перебора зн-ий следует, что $f(t)$ и $g(t)$ пересекаются хотя бы раз, причем $g(t)$ не кас-ся $f(t)$, т.е. в силу выпуклости $f(t)$ обязательно сущ-ет 2-е пересечение. Тогда имеем 2 корня $t>0$.

5) $x^2-3=t$
$x=\pm\sqrt{t+3}$, т.к $t>0$, то каждое зн-е t даст 2 корня x, удовл. ОДЗ. Тогда у исх-ого выр-я 4 корня

Ответ: 4

Чистовик 3

Задание 4

1) $\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases}$

~~2)~~ Пусть $xyz=\frac{1}{c}$:

$\begin{cases} 2x-3y+zc=6 \\ 3z-6x+yc=2 \\ 6y-2z+xc=3 \end{cases}$

2) $(1)\cdot 3+(2)$:

$+\begin{cases} \cancel{6x}-9y+3zc=18 \\ 3z-\cancel{6x}+yc=2 \end{cases}$

$3z+3zc-9y+yc=20$

$3z(1+c)\cancel{+9(y+c)}=20$

$-y(9-c)$

3) $(2)\cdot c+(3)\cdot 6$:

$+\begin{cases} 3zc-\cancel{6xc}+yc^2=2c \\ 36y-12z+\cancel{6xc}=18 \end{cases}$

$3zc+yc^2+36y-12z=2c+18$

$3z(c-4)+y(c^2+36)=2(c+9)$

$\cancel{y=2}$ $z=\frac{2(c+9)-y(c^2+36)}{3(c-4)}$

шетовик 4

4) $$\begin{cases} 3z(1+c)-y(9-c)=2c & \mid \cdot -(c-4) \\ 3z(c-4)+y(c^2+36)=2(c+9) & \mid \cdot (c+1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -3z(1+c)(c-4)+y(9-c)(c-4)=-2c(c-4) \\ 3z(c-4)(c+1)+y(c^2+36)(c+1)=2(c+9)(c+1) \end{cases}$$

$$y\left((9-c)(c-4)+(c^2+36)(c+1)\right)=-2c(c-4)+2(c+9)(c+1)$$

$$y(\underline{9c}-\cancel{36}-\cancel{c^2}+\underline{4c}+c^3+\cancel{c^2}+36c+\cancel{36})=-2c^2+8c+2(c^2+c+9c+9)$$

$$y(13c+c^3+36c)=y(c^3+49c)=-\cancel{2c^2}+8c+2c^2+\cancel{20c}+18$$

$$yc(c^2+49)=2c^2+98=2(c^2+49)$$

$\boxed{y=\frac{2}{c}}$ – в 1-е ур-е п. 4

5) $$3z(1+c)-\frac{2(9-c)}{c}=2c$$

$$3z+3zc-\frac{18}{c}+2=2c$$

$$\cancel{3}z(1+c)=\cancel{18}\left(1+\frac{1}{c}\right)$$

$$z(1+c)=\frac{6}{c}(c+1)$$

$$z=\frac{6}{c}$$

6) $$2x-3\cdot\frac{2}{c}+\cancel{3}\,\cancel{\frac{6}{c}\cdot c}=\cancel{6}$$

$$2x=\frac{6}{c}$$

$$x=\frac{3}{c}$$

Чистовик 5

7) $xyz = \frac{1}{c}$

$\frac{3}{c} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{6}{c} = \frac{1}{c}$

$36 = c^2$

$c = \pm 6$

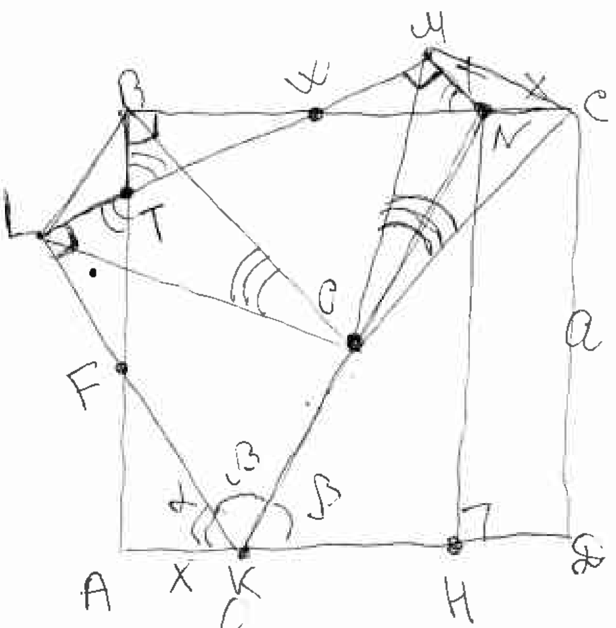
$x_1 = \frac{1}{2}$ $y_1 = \frac{1}{3}$ $z_1 = 1$

$x_2 = -\frac{1}{2}$ $y_2 = -\frac{1}{3}$ $z_2 = -1$

Ответ:

x	y	z
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	-1

Задание 5



Пусть $CD = a$, $\angle FKA = \alpha$, $\angle MKD = \beta$

1) В силу симметрии $NC = AK = x$, $MN = NC = x$

2) $\angle AFK = 90^\circ - \alpha$, $\angle LFT = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ $\angle LTF = \angle BTW = \alpha$, $\angle BWT = 90^\circ - \alpha$) $\angle MNW = \alpha \Rightarrow$

$\angle MNW = \angle BTW = \angle LTF = \angle FKA = \alpha$

3) • $\triangle MCO$ и $\triangle BCL$ образованы вследствие поворота квадрата отн-но т. $O \Rightarrow$ $\angle BCL = \angle COM$, $MO = CO = BO = LO$, т.к явл-ся $\frac{1}{2}$ диагонали $\Rightarrow \triangle BOL = \triangle MOL \Rightarrow MC = LB$

• $\angle TBO = \angle TLO = \angle OMN = \angle NCO = 45^\circ$, $\angle LBO = \angle BLO =$ $= \angle OMC = \angle OCM \Rightarrow \angle NMC = \angle NCM = \angle TBL = \angle TLB =$ $= \angle LBO - 45^\circ \Rightarrow$

Чистовик 6

$\Delta LTB = \Delta CNM \Rightarrow MN = NC = BT = LT = x$

- Пользуясь рав-ом сторон, а также рав-ом углов (из п. 2), делаем вывод, что $\Delta BWT = \Delta LFT = \Delta FKA = \Delta WMN$.

4) $S_{фигуры} = \underset{\text{трапеция}}{S_{LMNK}} + \underset{S}{S_{\Delta FAK}} + S_{\Delta BTW} = \frac{a^2}{2} + 2S$

Задача сводится к поиску максиму S

5) $\alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$

6) • ΔFAK:

$tg\alpha = \frac{AF}{AK} \Rightarrow AF = AK\, tg\alpha$ ~~$(\ldots)$~~

$AF = x\, tg\alpha$

- ΔKNH:

$tg\beta = \frac{NH}{KH} \Rightarrow KH = \frac{a}{tg\beta} = \frac{a}{tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})} = \frac{a}{ctg\frac{\alpha}{2}} = a\, tg\frac{\alpha}{2}$

- $S_{AFK} = S = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x\, tg\alpha = \frac{x^2 tg\alpha}{2}$

- $AB = a = 2x + a\, tg\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2}(1 - tg\frac{\alpha}{2})$

- $S = \frac{a^2}{8} \cdot tg\alpha \cdot (1 - tg\frac{\alpha}{2})^2 = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{(1 - tg^2\frac{\alpha}{2})} \cdot (1 - tg\frac{\alpha}{2})^2 =$

$= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2} \cdot (1 - tg\frac{\alpha}{2})^{\cancel{2}}}{\cancel{(1 - tg\frac{\alpha}{2})}(1 + tg\frac{\alpha}{2})} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}(1 - tg\frac{\alpha}{2})}{1 + tg\frac{\alpha}{2}}$,

если $tg\frac{\alpha}{2} = 1$, то $\alpha = 90°$, т.е. $S_{фигуры} = \frac{a^2}{2}$, $S = 0$, что не явл-ся наиб. площадью.

Чистовик 7

7) Пусть $tg\frac{x}{2} = t$, найдем макс. ф-ии:

$$\frac{t(1-t)}{1+t} = \frac{-t^2+t}{1+t}$$

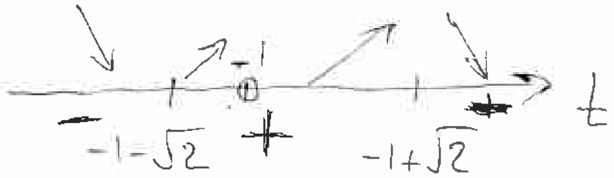
$$f'(t) = \frac{(1+t)(-2t+1)-(t-t^2)}{(1+t)^2} = \frac{-2t+1-2t^2+\cancel{t}-\cancel{t}+t^2}{(1+t)^2} =$$

$$= \frac{-t^2-2t+1}{(t+1)^2} = 0$$

$t \neq -1$ $\quad -t^2-2t+1 = 0$

$t^2+2t-1 = 0$

$t = -1\pm\sqrt{2}$



максимум ф-ии при $t = -1+\sqrt{2}$

8) $tg\alpha = \frac{2\cdot tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{+2(\sqrt{2}-1)}{1-(3-2\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{-2+2\sqrt{2}} = 1$

9) $S_{max} = \frac{a^2}{8}\cdot 1\cdot(1-(\sqrt{2}-1))^2 = \frac{a^2}{8}(2-\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{8}(6-4\sqrt{2}) =$

$= \frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2})$

10) $S_{фигуры\ max} = \frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2}{4}(3-2\sqrt{2}) = \frac{a^2}{2}(1+3-2\sqrt{2}) = \frac{a^2}{2}(4-2\sqrt{2})$

$= a^2(2-\sqrt{2}) = 17(2-\sqrt{2}) =$

$a^2 = 17$ - по усл-ю

Ответ: $17(2-\sqrt{2})$

Черновик 1

Задание 1

1) $\underbrace{20\ 21\ 22\ 23\ 24\ 25\ 26\ 27\ 28\ 29}_{10\cdot 2 \text{ цифр} = 20}\ 30$

2) Всего двухзн. чисел после 20 90 => 180 цифр
180 цифра - 9.

3) Дальше идут числа:
$\underbrace{100\ 101\ 102 \ldots 109}_{10 \text{ чисел, } 30 \text{ цифр}} \ldots 110$

4) Всего трехзн чисел: 90 => 270 цифр

5)

---

1) Все двухзн числа от 20 до 99: 99 - 20 + 1 = = 80
160 цифр

Трехзн-е: 100 - 999 : 900 чисел 900·3 = 2700 цифр

2) $\underbrace{20\ 21 \ldots 99}_{160 \text{ цифр}}\ \underbrace{100 \qquad}_{1861 \text{ цифр}}$

1861 | 3
18 | 620
1 ост

1861 = 620 · 3 + 1 => 620 трех зн. чисел и 1 цифра

$99\ \underbrace{\underbrace{100}_{101 \text{ чи}}\ 200,\ \cancel{300} \ldots 600\ \cancel{7}00}_{601} = 621$ числа

~~719~~ 7

Черновик 2

999 1 ..... 99 99 − 19 = 80

2021
160
1861

20 99

1 ... 99 999

10 15

999 − 99

10 11 12 13 14 15

720 − 99

621

Задание 2 $a = ?$

$$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - a) + a = 0$$

$$x \in [-1, 1]$$

$$|x| - \arcsin x + b\arccos x + b|x| - ba + a = 0$$

$$a = \arcsin x - |x| - b(\arccos x + |x| - 1)$$

$$\underbrace{\underbrace{1 \dots 19}_{19} \quad \underbrace{20 \dots 99}_{x}}_{99}$$

$x = 99 - 19 = 80$

2021
160
1861

620
1860

1861
160
2021

620
99
719

1861 | 3
| 620

16
99

Черновик 3

$$\begin{cases} x \in [-1; 1] \\ |x| \in [0; 1] \\ \arcsin \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \\ b\arccos \in [0; b \cdot \frac{\pi}{2}] \\ b|x| \in [0; b] \end{cases}$$

$a = ?$ $b \in R$
есть корней

$\cancel{|x| - \arcsin x + a}$

$$b = \frac{\arcsin x - a - |x|}{(\arccos x + |x| - 1)}$$

$$a = \arcsin x - |x| - b(\arccos x + |x| - 1)$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

квадратное
Разложение ?

$$\begin{cases} 2x^2y - 3y^2x + 1 - 6xy = 0 \\ -3x(y^2+2y) \\ D(x) = 9(y^2+2y)^2 - 8y = \\ = 9(y^4 + 4y^3 + 4y^2) - 8y = \\ = 9y^4 + 36y^3 + 36y^2 - 8y > 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$9y^3 + 36y^2 + 36y - 8 = 0$

$y = \pm 1$ $\ominus$

$y = \pm 2$ $\ominus$

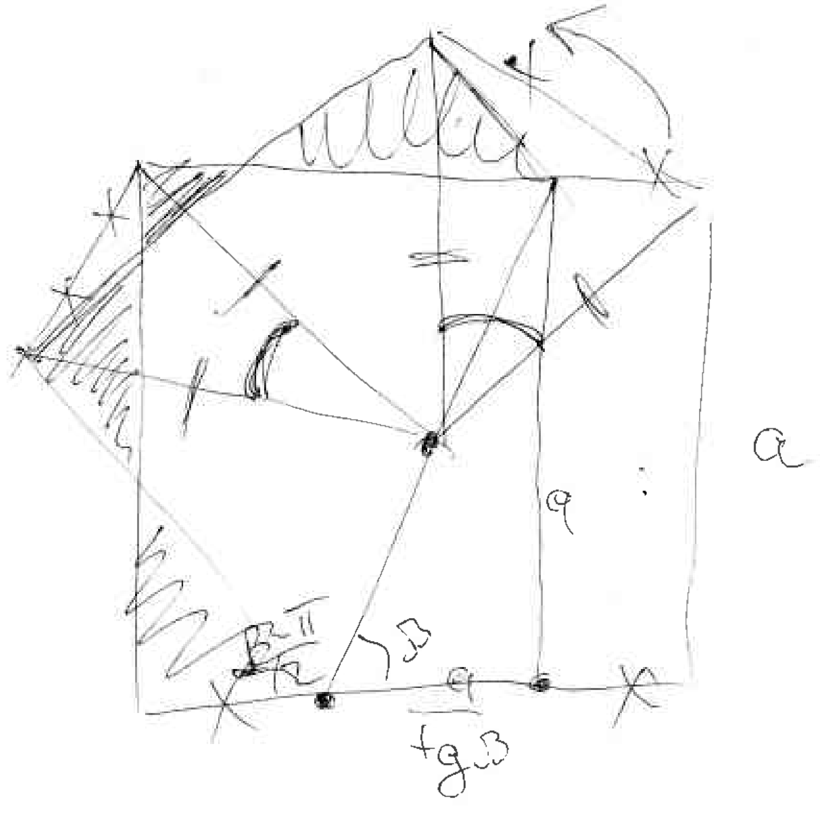
Черновик 4

4) $\begin{cases} 3z(1+c) - 9(y-c) = 2c \,|\cdot(c-4) \\ 3z(c-4) + y(c^2+36) = 2(c+9) \,|\cdot -(c+1) \end{cases}$

$+\begin{cases} 3z(c-4)(c+1) - 9(y-c)(c-4) = 2c(c-4) \\ -3z(c-4)(c+1) - y(c^2+36)(c+1) = -2(c+9)(c+1) \end{cases}$

$-9(y-c)(c-4) - y(c^2+36)(c+1) = 2c(c-4) - 2(c+9)(c+1)$

$y = \dfrac{2(c+9)(c+1) - 2c(c-4) - 9(y-c)(c-4)}{(c^2+36)(c+1)}$

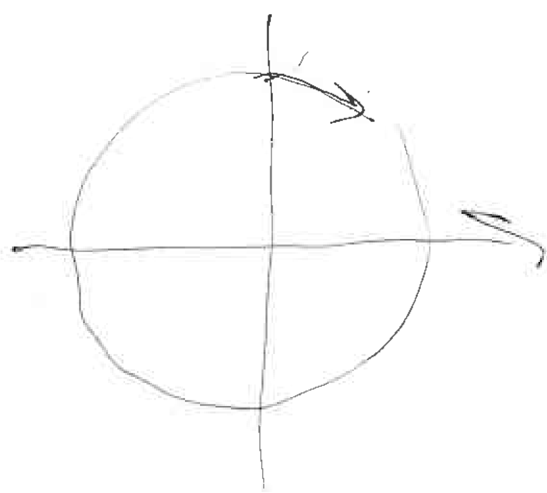


$S = a^2 = 17$

$x = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{tg\beta}\right)$

$S = a^2 + 2S =$ найти max

const

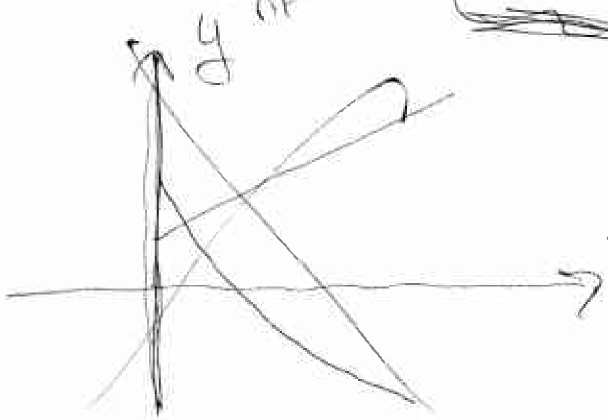


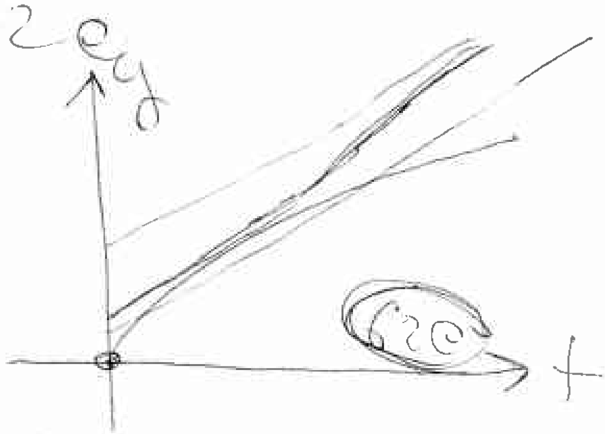
$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$, $\cancel{x^2-2=t}$ $x^2-3=t$ Черновик 5

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2 \qquad 0<\lg 2<1$ ✓

выпуклая вверх

719, 720





1861

626
99
719

$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$|x|(1+b) - \arcsin x + b\arccos x - b + a = 0$

$-\arcsin x + b(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) - b + a = 0$

$|x|(1+b) - \arcsin x(1+b) + b(\frac{\pi}{2} - 1) + a = 0$

$(1+b)(|x| - \arcsin x) + b(\frac{\pi}{2} - 1) + a = 0$

Черновик 6

4) $\cancel{2}(1+c)\cdot\dfrac{2(c+9)-y(c^2+36)}{\cancel{2}(c-4)} - 9(y-c) = 2c \mid \cdot(c-4)$

$2(c+9)(c+1) - y(c^2+36)(1+c) - 9(y-c)(c-4) = 2c(c-4)$

$2(c^2+c+9c+9) - y(c^2+c^3+36+36c) - 9(yc-4y-c^2+4c) = 20c-8c$

$2c^2+2c+18c+18-yc^2-yc^3-36y-36cy-9yc+36y+9c^2-36c=$
$=20c-80$

$2(c^2+c+9c+1) - 20c+80 - 9(yc-4y-c^2+4c)$

$2c^2+\cancel{2c}+18c+2\cancel{-20c}+80-9yc+36y+9c^2-36c$

$2c^2+2+8c-9yc+36y$

$\frac{a^2}{8}\cdot 1\cdot(2-\sqrt{2})^2 = (4-4\sqrt{2}+2) = (6-4\sqrt{2}) =$
$= 2(3-2\sqrt{2})$

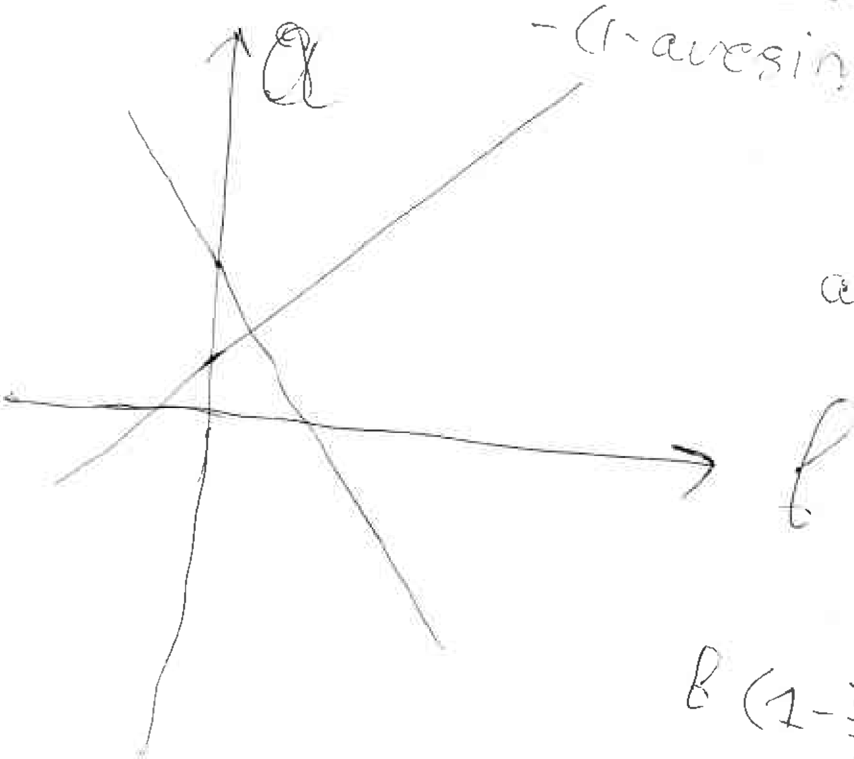
[1: 1-ЭЭх

Черновик 7

$|x| - \arcsin x + b\frac{\pi}{2} - b\arcsin x + b|x| + b - a = 0$

$a = +b(1 - |x| - \arccos x) + \arcsin x - |x|$

$-(1 - \arcsin x)$



Найти x

$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

$b(1 - \frac{\pi}{2})$

$b - b|x| - \frac{b \cdot \pi}{2} + b\arcsin x - |x| + \arcsin x$

$\cancel{-b(|x|}$

$\cancel{-b(|x|+1)}$

$x + \sqrt{1 - x^2} = 0$

$\cancel{-b(|x|+1)} + \arcsin x(b+1)$

$-|x|(b+1)$

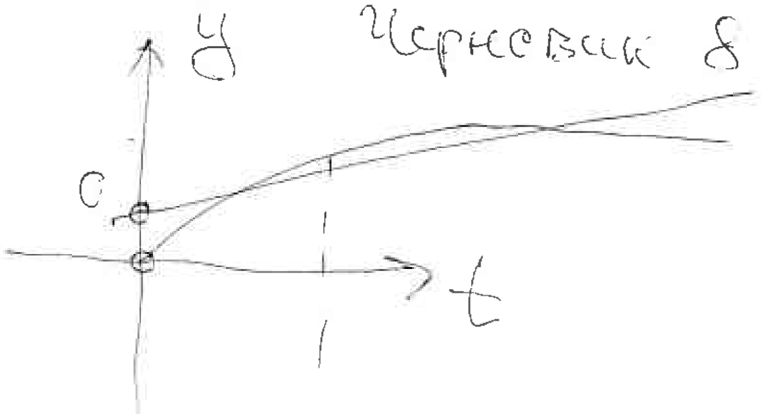
$x = -\sqrt{1 - x^2}$

$x^2 = 1 - x^2$

$\arccos x + \arcsin x = 1$

$a = (b+1)(-|x| + \arcsin x) + b(1 - \frac{\pi}{2})$

Черновик 8



$f(1) =$

$\cancel{\lg 2} > 2\lg 2$

$1 > \lg 4$

$xyz = \frac{1}{c}$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + zc = 6 \\ 3z - 6x + yc = 2 \\ 6y - 2z + xc = 3 \end{cases}$$