



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

## **ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА**

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Устименко Глеб Витальевич**

Класс: **8**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике  
2020/2021 учебный год  
Заключительный этап

ФИО участника: Устименко Глеб Витальевич

Класс: 8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Задача 7	Сумма*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	0 баллов	15 баллов	80 баллов

\*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов, верное решение всех задач — в 100 баллов.

Число 1

число 1

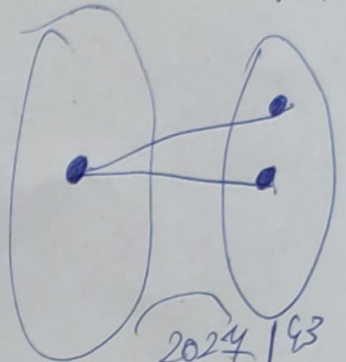
1)  $n = 4 \cdot 9 \cdot 13 + 2020 \cdot 2018 \cdot 2014$

$2 \cdot 100 = 200$

$$\begin{array}{r} 2014 \overline{) 13} \\ \underline{13} \phantom{00} \\ 41 \phantom{00} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 13 \\ \hline 189 \\ + 630 \\ \hline 819 \end{array}$$

$P_2 = -17$   
 $(-4+1) \cdot (-9+1) \cdot (-13+1) =$



$4 \cdot 9 = 63$

$8 \cdot 13 = 104$

5

$$\begin{array}{r} 659 \\ \underline{52} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 11} \\ \underline{11} \phantom{00} \\ 92 \phantom{00} \\ \underline{88} \phantom{00} \\ 40 \phantom{00} \\ \underline{33} \phantom{00} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2018 \overline{) 11} \\ \underline{11} \phantom{00} \\ 91 \phantom{00} \\ \underline{88} \phantom{00} \\ 38 \phantom{00} \\ \underline{33} \phantom{00} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 93} \\ \underline{184} \\ 30 \end{array}$$

$12 \cdot 13 = 156$

3

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 14} \\ \underline{14} \phantom{00} \\ 32 \phantom{00} \\ \underline{28} \phantom{00} \\ 150 \phantom{00} \\ \underline{136} \phantom{00} \\ 14 \end{array}$$

2027-промежуток 4.5

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 67} \\ \underline{188} \\ 294 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 91} \\ \underline{184} \\ 384 \\ \underline{369} \end{array}$$

$14 \cdot 12 = 168 \equiv 15$

$15 \cdot 8 = 120 \equiv 1$

120

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 31} \\ \underline{186} \\ 164 \\ \underline{155} \\ 12 \end{array}$$

$4 \cdot 13 = 52 \equiv 22$

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 23} \\ \underline{189} \phantom{00} \\ 180 \phantom{00} \\ \underline{161} \phantom{00} \\ 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 323 \overline{) 23} \\ \underline{23} \phantom{00} \\ 93 \phantom{00} \\ \underline{92} \phantom{00} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 29} \\ \underline{179} \\ 284 \\ \underline{251} \\ 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 34} \\ \underline{185} \\ 144 \end{array}$$

$4 \cdot 9 \cdot 13 + (2024-4) \cdot (2024-9) \cdot (2024-13)$

$36 \cdot 10^5 \cdot 8^5 + 36 \cdot 10^4 \cdot 8^5 + \dots + 36 \cdot 8^5 = 36 \cdot 8^5 \cdot 111111$



$$\begin{array}{r} 111111 \overline{) 34} \end{array}$$

Моммо

$$1) (-4+r) \cdot (-9+r) \cdot (-13+r) \cdot (63-16r) = (63-16r+r^2) \cdot (-34+r) =$$

$$= (-819 + 63r + 16 \cdot 13r - 16r^2 - 1r^2 + r^3 =$$

$$= -819 + 241r - 2r^2 + r^3$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 13 \\ \hline 13 \\ + 98 \\ \hline 111 \\ + 16 \\ \hline 127 \end{array}$$

$2024 \equiv r \pmod{P}$

$101 - 511$

$202 - 1022$

$202, 206, \dots, 1022$

$100 \cdot 102 \cdot \dots \cdot 200 \cdot 204 \cdot 208 \cdot \dots \cdot 1020 \cdot 2$

$$\frac{924}{2} = 462$$

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 241} \\ \underline{1894} \\ 517 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 4 \\ \hline 964 \\ + 1894 \\ \hline 2414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2020 \overline{) 4} \\ \underline{14} \\ 62 \\ \underline{56} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 4 \end{array}$$

$513, 515, \dots, 1023$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \times 909 \\ \hline 9090 \\ + 101 \\ \hline 109900 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 241 \\ \hline 964 \\ + 1894 \\ \hline 2414 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ \times 121 \\ \hline 256 \\ + 1280 \\ \hline 1536 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 16 \\ \hline 800 \\ + 500 \\ \hline 1300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0,99 \\ \times 0,99 \\ \hline 0,9801 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \times 98 \\ \hline 9800 \\ + 101 \\ \hline 109801 \end{array}$$

$(0,99) 462$

$\sqrt{0,3125}$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 2020 \\ \hline 22220 \\ + 11 \\ \hline 22231 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 92 \\ \hline 92 \\ + 184 \\ \hline 276 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 89 \\ \hline 1167 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 96 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31623 \overline{) 241} \\ \underline{241} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9021820 \\ + 241 \\ \hline 9022061 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 241 \\ \times 6 \\ \hline 1446 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 40 \\ \hline 1600 \end{array}$$

1) 2024

$$4) \frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \dots \cdot \frac{1022}{1023} \sqrt{\frac{5}{16}}$$

Броу  $\frac{1022}{2} - \frac{98}{2} = 511 - 49 = 462$  года  
23 инд

$$\frac{x^2y^2 + 2x^2y + x^2y - 2y - 1}{x^2y^2 + 2x^2y}$$

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1022-x}{1022-x+1} = 11$$

$$\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{y^2+2y}{y^2+2y+1} \cdot \frac{y^2+2y+1}{y^2+2y}$$

$$100 + 230 \cdot 2 = 560$$

$$\frac{360}{561} \cdot \frac{562}{563} =$$

$$y = 1122 - x$$

$$\frac{1122-x}{1122-x+1} \cdot \frac{y}{y+1} \cdot \frac{y^2+2y}{y^2+2y+1} = \frac{y^2+2y}{y^2+2y+1}$$

$$\frac{100}{101} \cdot \frac{1022}{1023}$$

2023

$$1000 - 10220 \mid 1023$$

$$1600 \dots$$

$$1000 \cdot 505 \dots$$

$$5) \frac{20 \cdot 20}{4} = 100$$

2)  $t$   
 $t - 65$   
 $t = 1,6t - 104$   
 $\frac{90}{65} \cdot 60$

$\frac{d}{3} = t$      $ts = d$   
 $\frac{d}{1,65} = t - 65$      $1,6ts = 104$   
 $\frac{d}{2,5} = t - 40$      $1,6ts - 104 \cdot 0,5 = 10d$   
 $1,6ts = 16d$   
 $104 \cdot 0,5 = 6d$

$$t + 104 = 1,6t$$

$$96t = 104 \cdot 2ts - 90 \cdot 2s = d$$

$$t = \frac{104}{0,6} = \frac{1040}{6} = \frac{520}{3} = 173 \frac{1}{3}$$

$$\frac{t}{t-40} = \frac{\frac{520}{3}}{\frac{400}{3}} = \frac{520}{400} = 1,3$$



58. Ответ: 100 рукопожатий.

Решение: по индукции докажем, что если есть  $n$  жителей, то можно сделать не более  $\frac{n^2}{4}$  рукопожатий. База — для 2 жителей утверждение верно (1 рукопожатие,  $\frac{2^2}{4} = 1$ ).

Пусть докажем для  $x$ . Докажем для  $x+2$ . Пусть было сделано наибольшее число рукопожатий среди  $x+2$  человек. Выберем двух, сделавших рукопожатие (они есть, т.к. также было сделано 0 рукопожатий, что очевидно не наибольшее, т.к. 1 рукопожатие между 2 людьми можно сделать). Среди остальных  $x$  сделано не более  $\frac{x^2}{4}$  рукопожатий, 1 рукопожатие сделали выбранные.

Не рассмотрим только рукопожатия между выбранными и остальными. Заметим, что выбранный человек не может пожать руку обоим выбранным (будет 3 пожать пожавших).

Значит, таких рукопожатий не более  $x$  (пол на каждого выбранных), заметим, что  $x$  рукопожатия среди выбранных не выйдут на эту сумму и не могут быть до  $\frac{x^2}{4}$ . Значит, среди  $x+2$  людей может быть сделано не более  $\frac{x^2}{4} + x + 1 = \frac{x^2 + 4x + 4}{4} = \frac{(x+2)^2}{4}$  рукопожатий,

и.т.д. Значит, среди 20 жителей можно было сделать не более  $\frac{20^2}{4} = 100$  рукопожатий.

Пример на 100: разобьем жителей на 2 группы по 10. Все люди из первой пожимают руку всем из второй,  $10 \cdot 10 = 100$  рукопожатий. Если есть 3 пожать пожавших, то какие-то 2 из них в одной группе, тогда не могли пожать руки, противоречие.



2. Ответ: на 30%.

Решение: пусть изначально Иван проезжал на велосипеде за  $t$  минут. При увеличении к  $1,6$  раз (на 60%) он доехал за  $t-65$  минут (на 40 поезде выехал на 25 раньше выехал), значит  $\frac{t}{t-65} = 1,6 \Rightarrow t = 1,6t - 104 \Rightarrow 0,6t = 104 \Rightarrow t = \frac{104}{0,6} = \frac{1040}{6} = \frac{520}{3}$ . Если он выехал на 40 минут позже и доехал в то же время, то проехал  $t-40$  минут. Осталось найти  $\frac{t}{t-40}$  (во сколько раз быстрее вышло ехать).

$$\frac{t}{t-40} = \frac{\frac{520}{3}}{\frac{520}{3}-40} = \frac{\frac{520}{3}}{\frac{400}{3}} = \frac{520}{400} = \frac{52}{40} = \frac{13}{10} = 1,3, \text{ значит, вышло}$$

ехать на 30% быстрее.

3. Для 60; наименьшую сумму во всех таких числах. Наименьшую сумму самого левого разряда заменим. Пусть там стоит  $x$ . На остальных 5 позициях можно 8 вариантов на каждую цифру (от 1 до 8), то есть ровно  $8^5$  чисел  $x$  в начале. Применяем значение от 1 до 8, значит, сумма левого разряда всех чисел равна  $(1+2+\dots+8) \cdot 8^5 = 36 \cdot 8^5$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для остальных разрядов. Значит, сумма всех таких чисел равна  $36 \cdot 8^5 \cdot 10^5 + 36 \cdot 8^5 \cdot 10^4 + \dots + 36 \cdot 8^5 = 36 \cdot 8^5 \cdot 111111$  (левого разряда в числе делится на  $10^5$  (правее него 5 цифр),  $\dots$ ).  $111111:34$ , значит, сумма делится на 34 п.м. д.

4.  $\frac{100}{101} \cdot \frac{102}{103} \cdot \dots \cdot \frac{1022}{1023} < \left(\frac{1022}{1023}\right)^{462} < \frac{5}{16}$  (пробовали 462)

$\left(\frac{1022}{1023}\right)^{462} < \frac{5}{16}$ , так как  $\frac{1022^{462}}{1023^{462}} < \frac{5}{16}$  что следует из того что  $5 \cdot 1023^{462} - 16 \cdot 1022^{462} > 0$