МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Текин Михаил Алексеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Текин Михаил Алексеевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	5 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	80 баллов

202122232 4... нас интересует цифра на 2021 месте.

С 20 до 99 мы имеем $(99-20)+1 = 80$ двузначных чисел.

=> Они дадут $80 \cdot 2 = 160$ подряд идущих цифр в нашей строке.

Со 100 до 999 мы имеем $(999-100)+1 = 900$ трехзнач. чисел.

$\underbrace{\text{=> Они дадут } 900 \cdot 3 = 2700 \text{ цифр в нашу строку}}$

=> На 2021-ом месте точно стоит цифра, которая является частью в записи трёхзначного числа.

=> $\frac{2021-160}{3} = 620\frac{1}{3}$ – кол-во трехзнач. чисел, ~~что~~ чтобы строка имела 2021 цифру.

=> 620-ое трехзначное число это $100+620-1 = 719$

при этом 7 будет стоять на 2018-ом месте, 1 на 2019-ом, 9 на 2020-ом в строке. => Следующее трехзначное число будет иметь цифру в разряде сотен, которая стоит на 2021-ом месте. Это число 720

=> 7 стоит на 2021-ом месте

Ответ: 7

№ 2. (Чистовик) Лист № 2 из 13

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

при b - любое имеется хотя бы одно решение.

$\arcsin x$ и $\arccos x$ - существуют $\Rightarrow x \in [-1; 1]$

$\Rightarrow |x|(1+b) + a - b = \arcsin x - b\arccos x =$

$= \arcsin x - b(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \arcsin x(1+b) - b\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (1+b)(|x| - \arcsin x) = b(1 - \frac{\pi}{2}) - a$ (*)

$\Rightarrow |x| - \arcsin x = \frac{b(1-\frac{\pi}{2}) - a}{1+b} = \frac{b(1-\frac{\pi}{2}) - (1-\frac{\pi}{2}) + (1-\frac{\pi}{2}) - a}{1+b} =$

$= \frac{(b+1)(1-\frac{\pi}{2}) - a - (1-\frac{\pi}{2})}{1+b} = 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{a+1-\frac{\pi}{2}}{b+1}$;

$\Rightarrow |x| - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2} - \frac{a+1-\frac{\pi}{2}}{b+1}$, где

$\left.\begin{cases} |x| \in [0; 1] \\ \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{cases}\right\} \Rightarrow 1 - \frac{\pi}{2} = \min$ - минимал. знач. выражения $(|x| - \arcsin x)$, которое достигается при $x = 1$

$\Rightarrow \frac{a+1-\frac{\pi}{2}}{b+1} = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{2} - 1}$, для $b \in R$

Проверим случай $b = -1$, вернувшись к (*)

$\Rightarrow (1-1)(|x| - \arcsin x) = -1(1 - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2} + 1$;

№ 3 (Чистовик) Лист № 5 из 13

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$$\lg\left(2^{\lg(x^2-3)}\right) = \lg\left(\lg 2^{(x^2-2)}\right)$$

$$\lg 2 \cdot \lg(x^2-3) = \lg(\lg 2) + \lg(x^2-2)$$

З.п. $x^2-3=t$; $\lg 2 = a$;

$$\Rightarrow a \lg t = \lg(a) + \lg(t+1)$$

$$a\left(\lg t - \lg(\sqrt[a]{t+1})\right) = \lg a$$

$$a \lg \frac{t}{\sqrt[a]{t+1}} = \lg a \Leftrightarrow \lg \frac{t}{\sqrt[a]{t+1}} = \frac{\lg a}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\sqrt[a]{t+1}} = 10^{\frac{\lg a}{a}} = \sqrt[a]{a} \Rightarrow t^a = a(t+1)$$

Обрат. замена a

$$t^{\lg 2} = \lg 2(t+1)$$, где $E(t^{\lg 2}) = (0; +\infty)$ – область определения

$\Rightarrow t^{\lg 2} - \lg 2 t - \lg 2 = 0$ – ф-я выпуклая вверх $\Rightarrow$ она имеет не более 2-ух решений

$\Rightarrow$ при $x=1$ степень больше 1 (прямой) и сама прямая пересекает ось Oy в точке >0.

$$3z(t-4) = 18 + 2t - yt^2 - 36y$$

$$\Rightarrow z = \frac{\frac{t^2y}{6} - \frac{t}{3} + 6y - 3}{2 - \frac{t}{2}};$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{3z+yt-2}{6}\right) - 3y + t\left(\frac{\frac{t^2y}{6} - \frac{t}{3} + 6y - 3}{2 - \frac{t}{2}}\right) = 6$$

$$z + \frac{yt}{3} - \frac{2}{3} - 3y + \frac{\frac{t^3y}{6} - \frac{t^2}{3} + 6yt - 3t}{2 - \frac{t}{2}} = 6$$

$$\Rightarrow 2z_{(2-\frac{t}{2})} - \frac{zt}{2} + \frac{2yt}{3} - \frac{yt^2}{6} - \frac{4}{3} + \frac{t}{3} - 6y + \frac{3ty}{2} + \frac{t^3y}{6} - \frac{t^2}{3} + 6yt - 3t =$$

$$= 12 - 3t.$$

$$\Rightarrow \frac{t^3y}{6} + \cancel{\frac{t^2y}{6}} - \frac{t^2}{3} + 6yt - \cancel{3t} - \frac{t}{3} + 6y - 3 + \frac{2ty}{3} - 6y - \cancel{\frac{t^2y}{6}} + \frac{3yt}{2} = \frac{40}{3} - \cancel{\frac{10t}{3}}$$

$$\frac{t^3y}{6} - \frac{t^2}{3} + t\left(6y + \frac{2}{3}y + \frac{3}{2}y\right) - 3 - \frac{40}{3} = 0 \mid \cdot 6$$

$$t^3y - 2t^2 + t(36y + 13y) - 98 = 0.$$

$$t^3y - 2t^2 + 49yt - 98 = 0.$$

$\Rightarrow t = \frac{2}{y}$ – решение.

	y	-2	$49y$	-98
$\frac{2}{y}$	y	0	$49y$	0

$$\Rightarrow yt^2 + 49y = 0$$

$$t^2 = -49 \quad \varnothing$$

А также по th Пифагора:

$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=\sqrt{17} \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$

Наша задача ~~сдел~~ сделать $\Delta S = max$.

$\Delta S = \frac{1}{2} x \cdot y, \quad \Rightarrow x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{17}; (*)$

$\Delta S \to max \Rightarrow xy \to max \Rightarrow$ т.к. (*) симметрично для x и для y

$\Rightarrow x \cdot y = max$, при $x=y$

$\Rightarrow 2x+\sqrt{2x^2}=\sqrt{17} \Rightarrow x(2+\sqrt{2})=\sqrt{17}.$

$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}; \quad \Rightarrow \Delta S = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{17}}{2+\sqrt{2}}\right)^2$

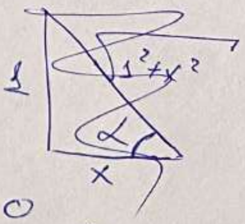
$\Rightarrow 2\Delta S = \frac{17}{(2+\sqrt{2})^2}$

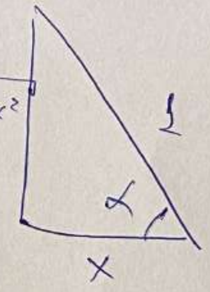
$\Rightarrow S' = \frac{17}{2} + \frac{17}{(2+\sqrt{2})^2}$

Ответ: $S' = \frac{17}{2} + \frac{17}{(2+\sqrt{2})^2}$

$|x| - \arcsin x + b\cdot|\arccos x + |x| - 1| + a = 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0 \\ \cancel{x - \arcsin x + b(\arccos x + x - 1) + a = 0}\end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \cancel{-x - \arcsin x + b(\arccos x - x - 1) + a = 0}\end{cases}\end{array}\right.$$





~~$b \in R \Rightarrow$~~ одно решение.

$x \in [-1; 1]$ из $\arcsin x$

$|x|(1+b) + a - b = \arcsin x - b\arccos x =$

$= \arcsin x - b(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) =$

$= \arcsin x(1+b) - b\cdot\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$

$(1+b)(|x| - \arcsin x) = b(1 - \frac{\pi}{2}) - a$

$|x| - \arcsin x = \dfrac{b(1-\frac{\pi}{2}) - a}{1+b};$

$|x| - \arcsin x = \dfrac{b(1-\frac{\pi}{2}) - (1-\frac{\pi}{2}) + (1-\frac{\pi}{2}) - a}{}$

$\underset{[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]}{|x| - \arcsin x} = \dfrac{(1-\frac{\pi}{2})(b+1) - a - (1-\frac{\pi}{2})}{b+1} = 1 - \frac{\pi}{2} - \dfrac{a + 1 - \frac{\pi}{2}}{b+1};$

$|x| \in [0; 1]$

min знач. $|x| - \arcsin x$

$\Rightarrow$ Для $b \in R \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} - 1$

Рассмотрим случай $b = -1$ $\Rightarrow$

$\frac{\pi}{2} - 1 + 1 = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 1 = \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{1}{x\cancel{y}z} = \frac{2}{\cancel{y}} \Rightarrow xz = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 3z - 6x + \cancel{2\cdot\frac{1}{2}} = \cancel{1}$

$\cancel{3z - 6x = \frac{3}{2}}$ ~~где $t \neq R$~~

$\Rightarrow 3z = 6x \Rightarrow x = \frac{z}{2}$

$\Rightarrow \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1.$

Если $z = 1$, то $x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$1 - 3y + \frac{2}{y} = 6$

$\frac{2}{y} - 3y - 5 = 0$

$-3y^2 - 5y + 2 = 0$

$3y^2 + 5y - 2 = 0$

$D = 25 + 24 = 49$

$y_{1,2} = \frac{-5 \pm 7}{6} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{array}{c} \quad x \quad\ y \quad\ z \\ \left(\frac{1}{2}; -2; 1\right) \\ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 1\right) \end{array}$ – решения.

Если $z = -1$, то $x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -1 - 3y - \frac{2}{y} = 6$

$-7 - 3y - \frac{2}{y} = 0$

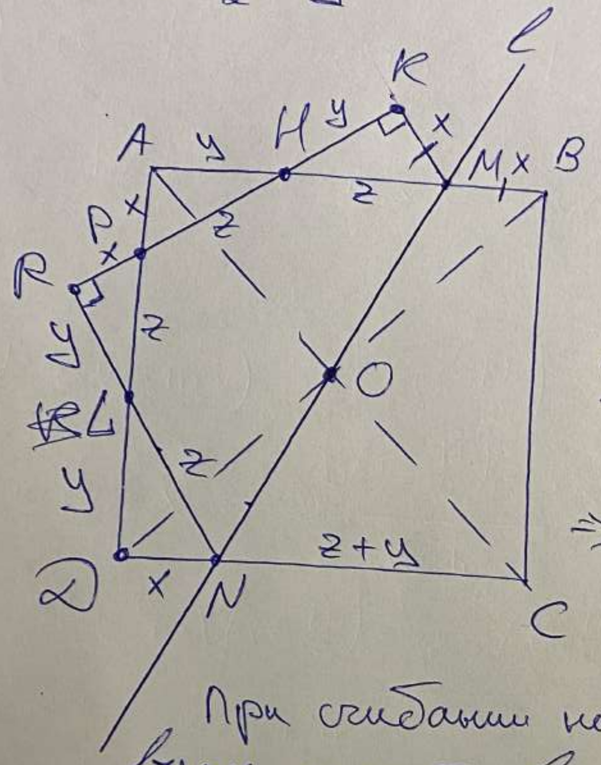
$\Rightarrow 0 = -1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 = 0$

$0 = 0 \Rightarrow x \in R \Rightarrow$ верно.

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$

№5

$\left.\begin{aligned} S &= 17 \\ S' &= ? \end{aligned}\right\}$



$S = 17 = a^2 \Rightarrow$
$a = \sqrt{17}$

Проведём прямую l, проход. через O.

$S_{AMND} = S_{MBCN}$ (в силу симметрии)

$\Rightarrow S_{AMND} = S_{MBCN} = \frac{1}{2}S = \frac{17}{2}.$

При сгибании нашего квадрата вдоль прямой l все прямые углы останутся прямыми.

$\Rightarrow S_{NRKM} = S_{MBCN} = \frac{1}{2}S = \frac{17}{2}$

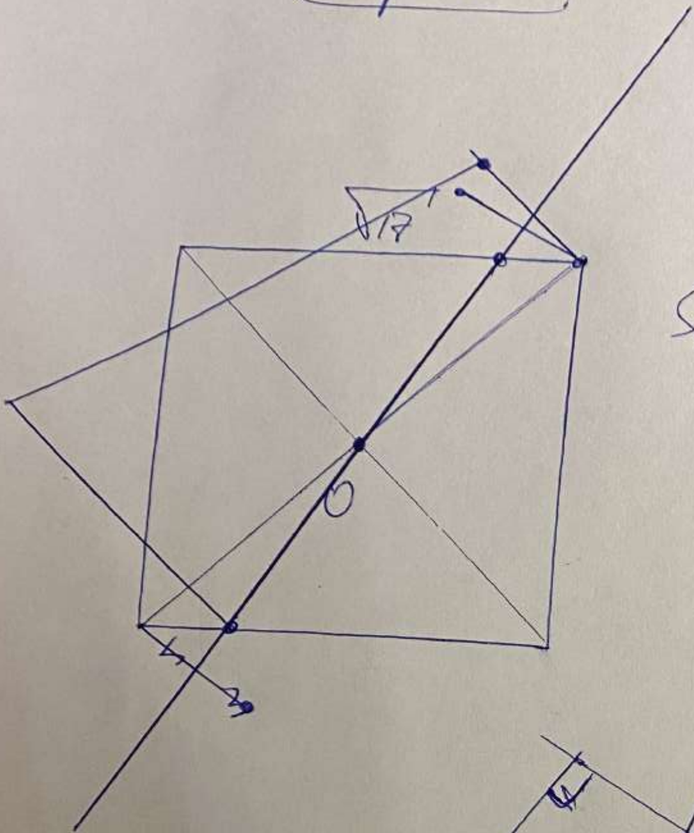
$S' = S_{NDLRPAHKM} \Rightarrow S' = S_{NRKM} + 2\Delta S$

где $\Delta S = S_{\Delta AKH} = S_{\Delta DLN}$

Обозначим стороны так, как показано на рисунке за x, y, z.

$\Rightarrow x + y + z = \sqrt{17}$

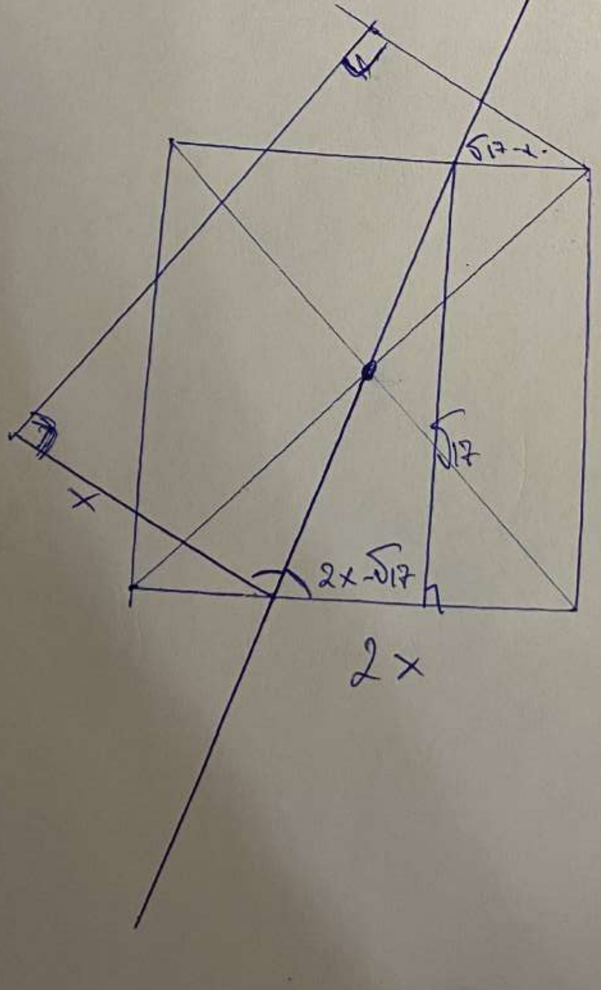
(Черновик) Лист № 12 из 13



$S = 17 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{17}$

$S_{трап} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot$

$\frac{1}{2}(x + \sqrt{17} - x)\cdot h$



$\Rightarrow t$ имеет два решения.

$$\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Обратная замена.

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = t_1 + 3 \\ x^2 = t_2 + 3 \\ t_1 \neq t_2;\ t_1 > 0;\ t_2 > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{t_1+3} \\ x_2 = -\sqrt{t_1+3} \\ x_3 = -\sqrt{t_2+3} \\ x_4 = \sqrt{t_2+3} \end{array}\right.$$ — все разные.

$x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4$

$\Rightarrow$ Ответ: Ур-ние имеет 4 корня.

№4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

З.п. $\frac{1}{xyz} = t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + tz = 6 \\ 3z - 6x + yt = 2 \\ 6y - 2z + xt = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3z + yt - 2}{6} \Rightarrow$$

$$6y - 2z + \frac{3zt + yt^2 - 2t}{6} = 3$$

$$36y - 12z + 3zt + yt^2 - 2t = 18$$

(Черновик) Лист № 13 из 13

20 21 22 23 24...

на 2021 месте.

~~021~~ $\left[\frac{2021}{10}\right] = 202.$

~~20~~:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

20 – 99;

80 чисел $80 \cdot 2 = 160$ цифр;

100 – 999

~~8~~ 900 чисел ~~800·3~~

$2021 - 160 = 1861$

$1861 : 3 = 620$, остаток 1

$620\frac{1}{3}$

=> 627 число стоит своей послед. цифрой на 2021 месте.

~~100+627–1=726~~; $100 + 620 - 1 = 719$

=> 6 → 720

7

$3y^2+7y+2=0$

$D=49-24=25$

$y_{1,2}=\frac{-7\pm5}{6}=\left[\begin{array}{l}-2\\-\frac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow \begin{array}{l}\left(-\frac{1}{2};-2;-1\right)\\\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1\right)\end{array}$ – решения.

Проверка.

$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$ – подходит $\left(\frac{1}{2};-2;1\right)$ – подходит

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1\right)$ – подходит $\left(-\frac{1}{2};-2;-1\right)$ – подходит.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)$

$\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-1\right)$

$\left(\frac{1}{2};-2;1\right)$

$\left(-\frac{1}{2};-2;-1\right)$

(Черновик) Лист №10 из 13

$$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$$

$$\lg\left(2^{\lg(x^2-3)}\right) = \lg\left(\lg 2^{x^2-2}\right)$$

$$\lg 2 \cdot \lg(x^2-3) = \lg(\lg 2) + \lg(x^2-2)$$

З.п. $x^2-3=t$

$$\Rightarrow \lg 2 \cdot \lg t = \lg(\lg 2) + \lg(t+1)$$

$$\lg 2\left(\cancel{\lg t} - \cancel{\lg}\sqrt[\lg 2]{t+1}\right) = \lg(\lg 2)$$

$$\lg 2 \cdot \lg \frac{t}{\sqrt[\lg 2]{t+1}} = \lg(\lg 2)$$

$$\frac{t}{\sqrt[\lg 2]{t+1}} = 10^{\frac{\lg(\lg 2)}{\lg 2}} = \sqrt[\lg 2]{\lg 2}$$

$t^{\lg 2} = \lg 2(t+1)$ – ф-я выпуклая ~~вниз~~ вверх.

$\Rightarrow$ $E\left(t^{\lg 2}\right) = (0;+\infty)$

$\Rightarrow t_1$ и $t_2 > 0$.

$\Rightarrow x^2 = t+3 \Rightarrow$ 4 корня