**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

# ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Богданов Яков Владимирович**

Класс: **11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Богданов Яков Владимирович

Класс: 11

| **Задача 1** | **Задача 2** | **Задача 3** | **Задача 4** | **Задача 5** | **Сумма*** |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 20 баллов | 100 баллов |

Чистовик. Вариант – 2

Задача 1.

Числа 20 – 99 имеют $80 \cdot 2 = 160$ цифр суммарно.

Значит искомая цифра имела $2021 - 160 = 1861$ место, если бы натуральные числа начинались бы с числа 100.

$1861 = 620 \cdot 3 + 1$, первые 900 чисел имеют по 3 цифры ⇒ иском. цифра – первая цифра 621-ого числа, т. е. числа 720.

Ответ: 7

Задача 3.

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{(x^2-2)}$ $\quad ($ОДЗ$: (x^2-3) > 0)$

$2^{\lg 2 \cdot \log_2(x^2-3)} = (\lg 2) \cdot (\log_2 2^{(x^2-2)})$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$

Пусть: $y := x^2 - 3 \quad (y > 0)$.

$y^{\lg 2} = (y+1)\lg 2$

$(y^{\lg 2} - (y+1)\lg 2)' = \lg 2 \cdot y^{\lg 2 - 1} - \lg 2 = \lg 2 (y^{\lg 2 - 1} - 1)$

$(y^{\lg 2} - (y+1) \cdot \lg 2)' = 0 \Rightarrow y = 1$

На ~~отрезках~~ полуинтервалах $(0;1]$ и $[1;+\infty)$ функция $(y^{\lg 2} - (y+1)\lg 2)$ от $y$ монотонна.

$0^{\lg 2} - (0+1)\lg 2 < 0 \qquad (y=0)$

$1^{\lg 2} - \lg 2 \cdot (1+1) = 1 - \lg 2^2 = \lg 2{,}5 > 0 \qquad (y=1)$

$(y+1)\lg 2 > y \lg 2 > y^{\lg 2}$ при достат. больших $y$. $\quad (y \to +\infty)$

На отрезках $(0;1]$ и $[1;+\infty)$ функция равна 0 по 1 разу, т. е. при двух знач. $y$ функция прин. значение 0.

$x = \pm\sqrt{y+3} \quad (y+3 > 0)$

Каждому $y$ соотв. два знач. $x$, значит есть 4 возмож. значения $x$.

Ответ: 4.

Чистовик.

Задача 4.

Пусть: $a := \frac{x}{3}$, $b := \frac{y}{2}$, $c := \frac{z}{6}$.

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{zx}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(a-b)+\frac{1}{6ab}=6 \\ 18(c-a)+\frac{1}{18ca}=2 \\ 12(b-c)+\frac{1}{12bc}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)=1-\frac{1}{36ab} \\ 9(c-a)=1-\frac{1}{36ca} \\ 4(b-c)=1-\frac{1}{36bc} \end{cases}$$

$$(a-b)-9(c-a)=\left(1-\frac{1}{36ab}\right)-\left(1-\frac{1}{36ca}\right)=\frac{b-c}{36abc}$$

Пусть: $p:=a-b$, $q:=9(c-a)$, $r:=4(b-c)$

$$p-q=\frac{r/4}{36abc} \Rightarrow \frac{1}{36abc}=\frac{p-q}{r}\cdot 4$$

Аналогично, $\frac{1}{36abc}=9\cdot\frac{r-p}{q}=\frac{q-r}{p}$.

$$\frac{q-r}{p}=9\cdot\frac{r-p}{q}$$

$$q^2-qr=9rp-9p^2$$

$$q^2+9p^2=r(q+9p)$$

$$r=\frac{q^2+9p^2}{q+9p}$$

$$\frac{1}{36abc}=\frac{q-r}{p}=\frac{q-\frac{q^2+9p^2}{q+9p}}{p}=9\cdot\frac{q-p}{q+9p}$$

$$4\cdot\frac{p-q}{r}=9\cdot\frac{q-p}{q+9p}$$

$$0=(q-p)\left(\frac{9}{q+9p}+\frac{4}{r}\right)$$

$$0=\frac{(q-p)}{r(q+9p)^2}\left(9r(q+9p)+4(q+9p)^2\right)$$

$$0=\frac{q-p}{(q+9p)(q^2+9p^2)}\cdot\left(9q^2+81p^2+4(q+9p)^2\right)$$

либо $q=p$, либо $q=p=q+9p=0$.

Значит $q=p$. Аналогично, $p=r=q$.

$p=q=r$, $p+q+r=0 \Rightarrow p=q=r=0 \Rightarrow a=b=c$. +

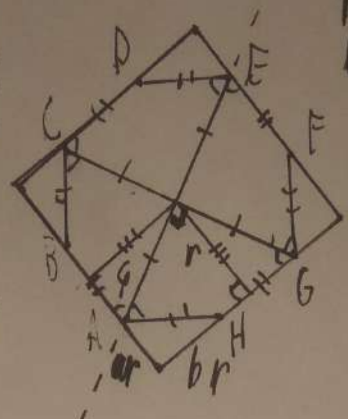
место 2 из 6

$a=b=c$, $(a-b)=1-\frac{1}{36ab} \Rightarrow a=b=c=\pm\frac{1}{6}$ Чистовик.

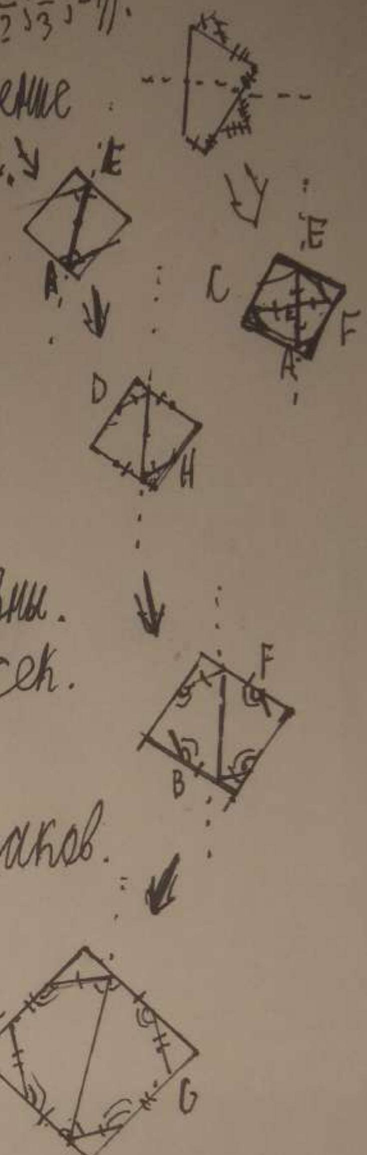
$x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$, $z=\pm 1$ $(x=3a, y=2b, z=6z)$

Ответ: $\{x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}, z=1\}$ либо $x=-\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{6}$; $\left(\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};1\right)\right.$ и $\left.\left(\frac{-1}{2};\frac{-1}{3};-1\right)\right)$.

Задача 5.




построение восмиуг.

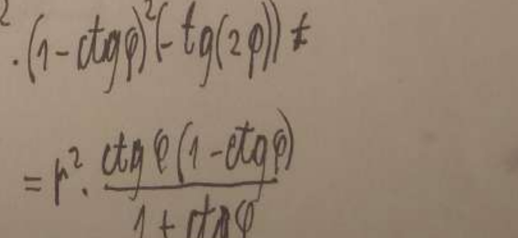



Фигура состоящая из точек квадрата, которые будут склеены представляет собой восьмиугольник (или квадрат), у котор. четвёрки ~~несимм. сторон и~~ несимметн. углов имеют одинак. величину и все стороны равны.

Пусть: прямая сгиба составляет угол $\varphi$ с пересек. стороной квадрата $(\varphi<\frac{\pi}{2})$, $r$ – половина стороны.

Непроклеянные части квадр. составл. 4 ~~рав~~ одинаков. прямоуг. треуг..

Пусть: $ar$ и $br$ – длины катетов треуг..




$ar + r\,ctg\varphi = r$

$a = 1 - ctg\varphi$

$\frac{br}{ar} = tg(\pi - 2\varphi)$

$b = -a\,tg(2\varphi)$

$S_\Delta = \frac{ar\cdot br}{2} = \frac{r^2}{2}\cdot ab = \frac{r^2}{2}\cdot a^2\cdot(-tg(2\varphi)) = \frac{r^2}{2}\cdot(1-ctg\varphi)^2(-tg(2\varphi)) \neq$

$S_\Delta = \frac{r^2}{2}\cdot(1-ctg\varphi)^2\cdot\frac{-2}{ctg\varphi - tg\varphi} = r^2\cdot\frac{(1-ctg\varphi)^2}{tg\varphi - ctg\varphi} = r^2\cdot\frac{ctg\varphi(1-ctg\varphi)}{1+ctg\varphi}$

$S_{п.ф.} = 0{,}5S_{кв.} + 2S_\Delta = 2r^2 + 2\cdot r^2\left(\frac{ctg\varphi(1-ctg\varphi)}{1+ctg\varphi}\right)$

Нужно найти максимум $\frac{ctg\varphi(1-ctg\varphi)}{1+ctg\varphi}$

Пусть: $c = ctg\varphi$

$\varphi\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow c\in[0;1]$

$$\frac{\partial\left(\frac{c(1-c)}{1+c}\right)}{\partial c} = \frac{(1-2c)(1+c)-1\cdot(c-c^2)}{(1+c)^2} = \frac{1-2c-c^2}{(1+c)^2}$$ Чистовик.

$1-2c-c^2=0 \Rightarrow c^2+2c-1=0 \Rightarrow c=-1\pm\sqrt{2}$

$c=\sqrt{2}-1 \quad (c\in[0,1])$

При $c=0$: $\frac{c(1-c)}{1+c}=0$

При $c=\sqrt{2}-1$: $\frac{c(1-c)}{1+c} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}-1)^2$

При $c=1$: $\frac{c(1-c)}{1+c}=0$

Максимум — $(\sqrt{2}-1)^2$

$S_{п.ф.max} = 2r^2+2r^2\cdot(\sqrt{2}-1)^2 = 2r^2(1+(\sqrt{2}-1)^2) = 2r^2(4-2\sqrt{2}) = (2r)^2(2-\sqrt{2})$

$S_{п.ф.} = S_{кв.}\cdot(2-\sqrt{2}) = 17(2-\sqrt{2})$

Ответ: $17(2-\sqrt{2})$.

Задача 2.

$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$|x| - \arcsin x + a + b(|x| - \arcsin x + \frac{\pi}{2} - 1) = 0$

Пусть: $y := |x| - \arcsin x$.

$y + a + b(y + \frac{\pi}{2} - 1) = 0$

~~При $b=0$: $y+a=0$, значит $y$ может быть равно $-a$.~~

~~При $b \neq 0$~~

$y(b+1) = b - b\frac{\pi}{2} - a$

$y = \frac{b(1-\frac{\pi}{2})-a}{b+1} = (1-\frac{\pi}{2}) + \frac{-(1-\frac{\pi}{2})-a}{b+1}$

$\cancel{\left(\frac{b(1-\frac{\pi}{2})-a}{b+1}\right)' = \frac{(1-\frac{\pi}{2})(b+1)-(b(1-\frac{\pi}{2})-a)}{(b+1)^2} = 1-\frac{\pi}{2}+a}$

$y = 1-\frac{\pi}{2} - \frac{1-\frac{\pi}{2}+a}{b+1}$

При $a \neq \frac{\pi}{2}-1$, $y$ должно принимать любое значение, но:

О.Д.З $x$ в arccos$x$ — это $[-1;1]$, О.Д.З arcsin$x$ — это $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

$|y| \le |x| + |\arcsin x| \le 1 + \frac{\pi}{2}$

Чистовик.

Противоречие с $a \ne \frac{\pi}{2} - 1$.

При $a = \frac{\pi}{2} - 1$:

$y = 1 - \frac{\pi}{2}$

$|x| - \arcsin x = 1 - \frac{\pi}{2}$

$x = 1$ подходит

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

лист 5 из 6

Черновик

$2021-2\cdot 80 = 1861 = 620\cdot 3+1$ $\quad \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$0721$

$a$

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

$|\sin y| - y + b\left(y + \frac{\pi}{2} + |\sin y| - 1\right) + a = 0$

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ ?

$2^{\lg_2(x^2-3)\cdot \lg 2} = (x^2-2)\lg 2$

$(x^2-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$

$\frac{2}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$

$y^{\lg 2} = (y+1)\lg 2,$

$a = r(1-\mathrm{ctg}\,\varphi)$

$((y+1)\lg 2 - y^{\lg 2})' = \lg 2 - \lg 2\cdot y^{\lg 2 - 1} = \lg 2(1 - y^{\lg 2 - 1})$

$b = a\cdot \mathrm{tg}(\pi - 2\varphi) = -a\,\mathrm{tg}(2\varphi) = \frac{-2a}{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{ctg}\,\varphi}$

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{zx} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

$x\ y\ z$

$3\ 2\ 6$

$S_\Delta = \frac{ab}{2} = -\frac{a^2}{2}\mathrm{tg}\,2\varphi = -\frac{r^2}{2}(1-\mathrm{ctg}\,\varphi)^2\,\mathrm{tg}\,2\varphi$

$S_\Delta = r^2\frac{(1-\mathrm{ctg}\,\varphi)^2}{\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{ctg}\,\varphi} = r^2\,\mathrm{ctg}\,\varphi\ \frac{1-\mathrm{ctg}\,\varphi}{1+\mathrm{ctg}\,\varphi}$

$x = 3a$

$y = 2b$

$z = 6c$

$\frac{p-r}{p+r} = \frac{r^2-p^2}{r^2+p^2}$

$S = 2r^2 + 2S_\Delta = 2r^2 + 2r^2\left(c\cdot\frac{1-c}{1+c}\right)$

$r^2+p^2 = -(p+r)^2$

$\frac{r-p}{q} = \frac{r^2-p^2}{r^2+p^2}$

$$\begin{cases} 6(a-b) + \frac{1}{6ab} = 6 \\ 18(c-a) + \frac{1}{18ca} = 2 \\ 12(b-c) + \frac{1}{12bc} = 3 \end{cases}$$

$\left(c\cdot\frac{1-c}{1+c}\right)' = \frac{1-c}{1+c} + c\cdot\frac{-(1+c)-(1-c)}{(1+c)^2} = \frac{1-c}{1+c} - \frac{2c}{(1+c)^2} = \frac{1-2c-c^2}{(1+c)^2}$ $\quad c\in[0,1]$

$\frac{p-q}{r} = \frac{q-r}{p} = \frac{p-r}{p+r}$

$1-2c-c^2 = 0 \Rightarrow c^2+2c-1 = 0 \Rightarrow c = -1\pm\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}-1$

$$\begin{cases} (a-b) = 1 - \frac{1}{36ab} \\ 9(c-a) = 1 - \frac{1}{36ca} \\ 4(b-c) = 1 - \frac{1}{36bc} \end{cases}$$

$p$

$q$

$r$

$p^2+r^2 = q(r+p)$

$q = \frac{p^2+r^2}{p+r}$

$S_\Delta = r^2\cdot(-1+\sqrt{2})\cdot\frac{1-(-1+\sqrt{2})}{1+(-1+\sqrt{2})} = r^2\cdot\frac{(-1+\sqrt{2})\cdot(2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

$S_\Delta = r^2\cdot(-1+\sqrt{2})^2 = r^2c^2$

$9(c-a) - 4(b-c) = \frac{a-b}{36abc}$

$q\cdot\frac{q-p}{q+9p}$

$S_\Delta = r^2(\sqrt{2}-1)^2$

$\frac{q}{q+9p} = -\frac{4}{r}$

$9r + 4(q+9p)$

$S = 2r^2 + 2r^2(\sqrt{2}-1)^2 = 2r^2(4-2\sqrt{2}) = (2r)^2(2-\sqrt{2}) = 17(2-\sqrt{2})$

$4(b-c) - (a-b) = \frac{c-a}{36abc}$

$\frac{q-r}{p} = q\cdot\frac{r-p}{q}$

$4\cdot\frac{p-q}{r}$

$q^2+9p^2 = r(q+9p)$

$r = \frac{q^2+9p^2}{q+9p}$

лист 6 из 6