МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Семенов Андрей Алексеевич**

Класс: **11**

Технический балл: **75**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Семенов Андрей Алексеевич

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	10 баллов	20 баллов	5 баллов	20 баллов	75 баллов

4) $a=2 \quad b=3 \quad c=6$

$ax-by-c=-\frac{1}{xy}$

$bz-cx-a=-\frac{1}{xz}$

$cy-az-b=-\frac{1}{yz}$

$a=\frac{1}{xz} \quad \begin{cases} \frac{1}{xz}=2 \\ \frac{1}{yz}=3 \\ \frac{1}{xy}=6 \end{cases} \quad \frac{1}{x^2y^2z^2}=36 \quad \frac{1}{xyz}=\pm 6$

$b=\frac{1}{yz} \quad xyz=6$

$c=\frac{1}{xy} \quad \frac{1}{y}=\frac{1}{xyz}\cdot\frac{1}{xz}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{x}=\frac{6}{3}=2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{z}=1 \Rightarrow z=1$

$xyz=-6$

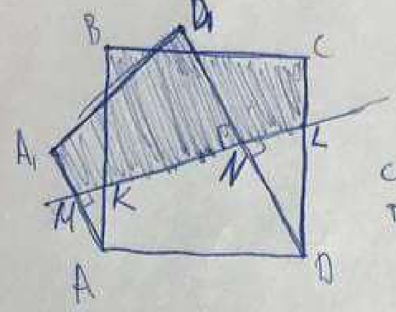
$y=-\frac{1}{3};\ x=-\frac{1}{2};\ z=-1$

Ответ: 1) $y=\frac{1}{3};\ x=\frac{1}{2};\ z=1$

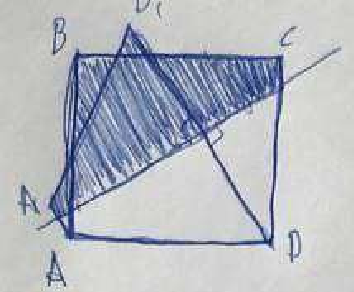
2) $y=-\frac{1}{3};\ x=-\frac{1}{2};\ z=-1$

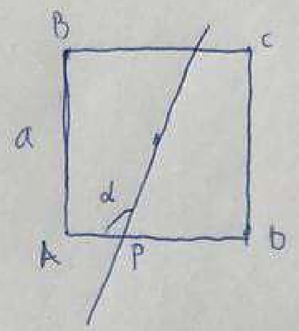
№5)

$S=17$



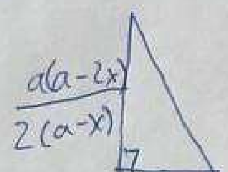
MA_1D_1N – прямоугольная трапеция с осн. $MA_1 \parallel D_1N$, $\angle N=90^\circ$; $BCLK$ – тоже прямоуг. трапеция с осн. $CL \parallel BK$, $\angle B=90^\circ$.





Площадь фигуры полученной после сгибания равна сумме площадей трапеции (часть которой касается стола) и двух одинаковых прямоугольных треугольников.

$S_{трап.} = \frac{a^2}{2}$ $\qquad S_{тр} = \frac{ax(a-2x)}{4(a-x)}$



Площадь, как функция x: $S(x) = \frac{a^2}{2} + 2\frac{ax(a-2x)}{4(a-x)} =$

$= \frac{a^2}{2} + \underbrace{\frac{ax(a-2x)}{2(a-x)}}_{\Delta x}$ Ищем максимум для $S(x)$ $0 \le x \le \frac{a}{2}$

т. максимума: $x = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2} = a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Значит угол $\frac{7\pi}{4}$ $\Rightarrow S = \frac{17}{2} + 17\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right) = 34 - 17\sqrt{2}$

Ответ: $34-17\sqrt{2}$

Усл.

1) 2021222 3 ... 99 100

Какая цифра стоит на 2021 месте?

~~[illegible]~~ $\overline{abc}$

2) $|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + a = 0$

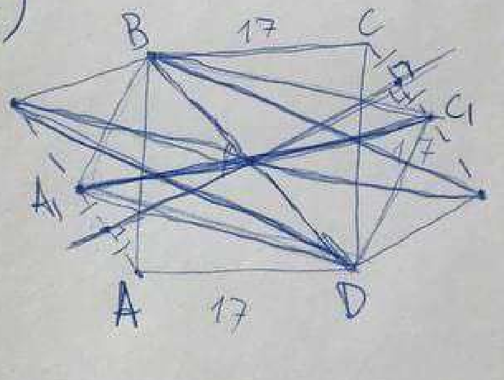
при любом в — одно решение.

3) $2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$

Сколько корней?

4) $$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 3z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3 \end{cases}$$

5)



$\triangle ADA_1 = \triangle BCC_1 \Rightarrow BC_1 = A_1D,\ BC_1 \parallel A_1D \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1BC_1D$ — параллелограмм.

т. B, D — симметричны относительно центра $\Rightarrow B \to D,\ D \to B$

Черновик 1/5

Черновик 3/5

1) $2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \quad | \cdot xy, \; xy \neq 0$

$\cancel{2x^2y-3y^2x+1=6xy} \qquad 1=3y^2x-2x^2y+6xy$

$3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \quad | \cdot xz$

$3xz^2-6x^2z+1=2xz \qquad 1=6x^2z-3xz^2+2xz$

$6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \quad | \cdot yz$

$6y^2z-2z^2y+1=3yz \qquad 1=2z^2y-6y^2z+3yz$

$$\begin{cases} 2x-3y+\frac{1}{xy}=6 \\ 3z-6x+\frac{1}{xz}=2 \\ 6y-2z+\frac{1}{yz}=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2};\; y=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \Rightarrow z=1 \\ y=\frac{1}{3};\; z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1-1+\frac{1}{\frac{1}{6}}=6 \\ 3-3+\frac{1}{\frac{1}{2}}=2 \\ 2-2+\frac{1}{\frac{1}{3}}=3 \end{cases}$$

~~Ответ: $x=\frac{1}{2};\; y=\frac{1}{3};\; z=1$~~

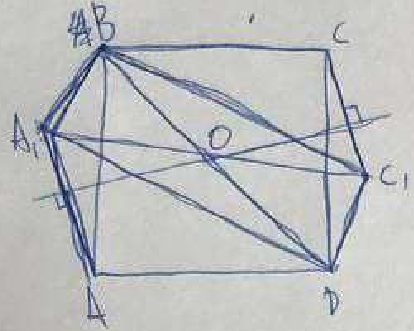
$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{3} \\ z=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1+1+6=6 \\ -3+3+2=2 \\ -2+2+3=3 \end{cases}$$

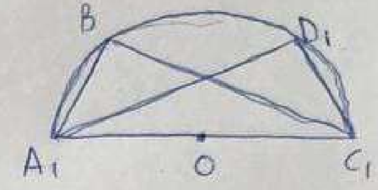
Ответ: 1) $x=\frac{1}{2};\; y=\frac{1}{3};\; z=1$. 2) $x=-\frac{1}{2};\; y=-\frac{1}{3};\; z=-1$.

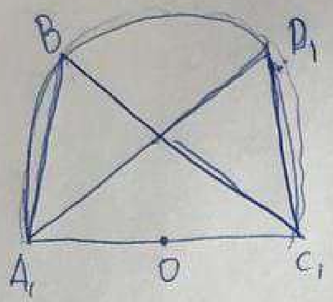
Черновик 2/5

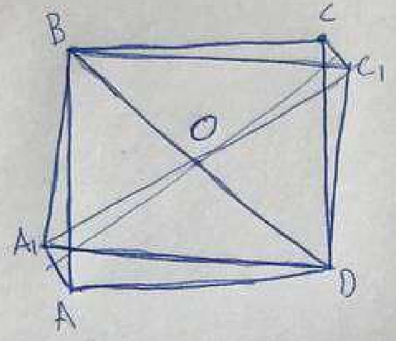
Черновик 3/5

5)





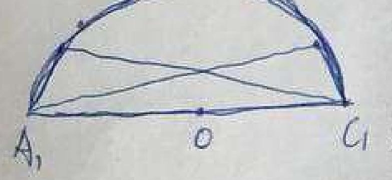


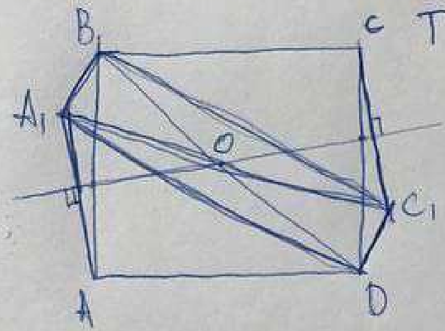


A_1BC_1D - семейство параллелограммов

$S_{\text{парал.}} = d_1 d_2 \sin\alpha$

d_1 фиксирована $= BD$.





Т. A BCD принадлежат окр., с центром в т. O, $r = OA$.

При отражении относительно прямой, проходящей через центр, ~~что~~ окружность перех. сама в себя. Сгибание

Черновик 3/5

1) 20 21 22 23 ... 99 100 101 ...

160

1 1я пара   159   80я пара   1я тройка

2021 − 160 = 1861   1861 = 1860 + 1 = 620 · 3 + 1

~~100 101 102 ... 720 7 22~~

~~620я тройка~~

(т.е. 160 знаков)

Первые 80 чисел двузначные, далее 620 трехзначных чисел, т.е. 1860 знаков 1860 + 160 = 2020. 2021 цифра = 7

~~Ответ: 7~~

2021 цифра

100 101 102 ... 719 720

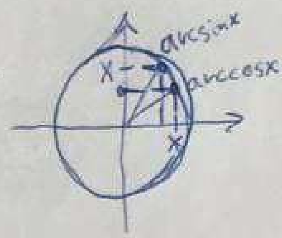
620я тройка

Ответ: 7.

Чистовик 1/5

2) $|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) = -a$

$a = 0$



$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |x| - \arcsin x = |x| - \frac{\pi}{2} + \arccos x \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| - \arcsin x = |x| + \arccos x - 1 + 1 - \frac{\pi}{2}$

Пусть $t = |x| + \arccos x - 1$. Получаем:

$0 = t + 1 - \frac{\pi}{2} + bt + a \Leftrightarrow (b+1) = -a + \frac{\pi}{2} - 1, \Rightarrow$

$\Rightarrow$ может подойти только $a = \frac{\pi}{2} - 1$

При $a = \frac{\pi}{2} - 1$ число 1 является корнем уравнения:

$t = |1| + \arccos 1 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow (b+1)t = 0 = -a + \frac{\pi}{2} - 1.$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - 1$.

3) $$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$$

$t = x^2-3$, $t>0 \Leftrightarrow x^2 = t+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{t+3} \\ x = -\sqrt{t+3} \end{array}\right.$

$2^{\lg t} = \lg 2^{t+1}$; $(10^{\lg 2})^{\lg t} = (t+1)\lg 2$

$(10^{\lg t})^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$; $t^{\lg 2} = (t+1)\lg 2$

$f(t) = 0$, где $f(t) = t^{\lg 2} - (t+1)\lg 2$

$f(0) = -\lg 2 < 0$

$f'(t) = \lg 2 \cdot t^{\lg 2 - 1} - \lg 2 = \lg 2\,(t^{\lg 0,2} - 1)$

$\lg 0,2 < 0 \Rightarrow f'(t) > 0$ при $0<t<1$,

$f'(t) = 0$ при $t = 1$, $f'(t) < 0$, при $t > 1$ (т.к. $\lg 2 > 0$)

$y = f(t)$, возрастает при $t \in [0;1]$, убывает при $t \geq 1$

$f(1) = 1 - 2\lg 2 > 0$, т.к. $\lg 2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 4 < 10$

$f(10) = 10^{\lg 2} - (10+1)\lg 2 = 2 - 11\lg 2 < 0$, т.к. $\lg 2 > \frac{2}{11} \Leftrightarrow 2^{11} > 10^{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2048 > 100$. Значит $f(t) = 0$ имеет по одному корню

$f(t) = 0$ при $t \in (0;1)$ и $t > 1$, т.е. имеет два корня $t > 0$

Тогда x имеет $2 \cdot 2 = 4$ корня

Ответ: 4