МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьевы горы»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сурмалян Николай Арутюнович**

Класс: **11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **4 апреля 2021 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Сурмалян Николай Арутюнович

Класс: 11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Сумма***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	95 баллов

Чистовик № 1

Вариант №2

№ 1

Дано:

Число 20212223...

Множество N чисел с 20

Решение:

Числа с 20 по 99 первые занимают в этом ряду $80 \cdot 2 = 160$ (мест)

Трехзначные числа со 100, всего 900 чисел, Они занимают $900 \cdot 3 = 2700$ мест.

Все числа взять не получится, так как с учетом двухзначных остается $2021 - 160 = 1861$ мест.

$2700 > 1861$

Разделим 1860 на 3, получится $620 \cdot 3$ чисел.

То есть, возможные трехзначные числа от 100 до 719

$719 = 620$ трехзначных $+ 99$ двухзначных ~~[illegible]~~

Таким образом будут заняты $1860 + 160 = 2020$ (мест) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ на 2021 месте будет стоять первая цифра числа 720, то есть 7.

Ответ: 7.

Чистовик №2

№2

$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$, b - любое

Возьмем значение b так, чтобы упростить уравнение: $b = -1$. Учтём, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, получим

$1 - \frac{\pi}{2} + a = 0$. То есть, при $b = -1$ уравнение будет иметь решение только при одном значении $a = \frac{\pi}{2} - 1$ $\Rightarrow$ никакие другие значения a не будут в ответе.

Проверим, будет ли уравнение иметь решение для любого b, если $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

$|x| - \arcsin x + b(\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0.$

При $x = 1$ уравнение превращается в тождество для любого b.

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

Ответ: $a = \frac{\pi}{2} - 1$.

№3

~~$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{x^2-2}$ - запиши прим.~~

$2^{\lg(x^2-3)} = x^2 - 2 \lg 2$ - запоминаться

$\log_2 2^{\lg(x^2-3)} = \lg x^2 - 3$

$\lg 2$

~~$2 \lg(x^2) \cdot x^2 - 2 \lg^2$ - может только~~

~~$2 \lg (x - 3$ - переписать перепишу~~

Листовик № 3

№ 3

$2^{\lg(x^2-3)} = \lg 2^{\,x^2-2}$

$(x^3-3)^{\lg 2} = (x^2-2)\lg 2$ (по формуле $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$)

Обозначим

$x^2-3=\beta$

$\lg 2=\alpha$ $\qquad \beta^{\alpha}=(\beta+1)\alpha$, $\alpha<1$

$(\beta^{\alpha})'=\alpha\beta^{\alpha-1}=\dfrac{\alpha}{\beta^{1-\alpha}} \to 0$, $\beta\to\infty$ ⇒

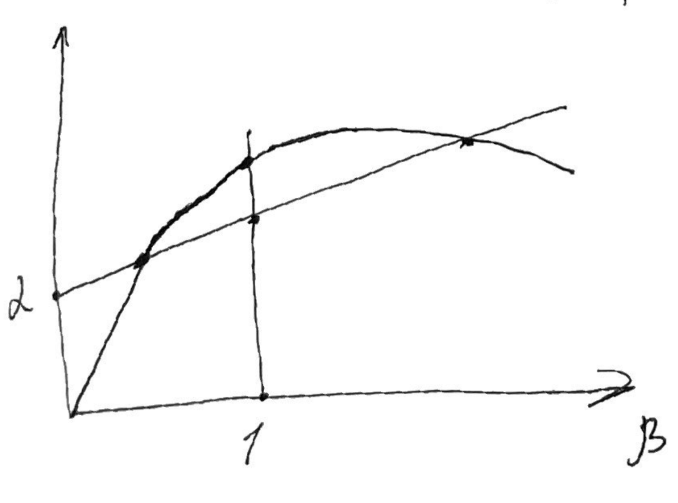
⇒ График функции β^2 - выпуклый вверх, производная монотонно уменьшается.

$f(\beta)=\beta^{\alpha}$; $g(\beta)=\alpha(\beta+1)$

$f(0)=0$; $g(0)=\alpha$ ⇒ $f(0)<g(0)$

$f(1)=1$; $g(1)=2\alpha$ $f(1)>g(1)$. Так как $1>2\lg 2$ ⇒

⇒ $\frac{1}{2}>\lg 2 \mid 10^{\cdot}$ ⇒ $\sqrt{10}>2 \Leftrightarrow 10>4$ - верно.



Две точки пересечения

$x^2=3+t$, всего 4 корня

Ответ: 4 корня.

Чистовик №4

№ 4

$$\begin{cases} 2x - 3y + \frac{1}{xy} = 6 \\ 6z - 6x + \frac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \frac{1}{yz} = 3. \end{cases}$$

Введем параметр $c = \frac{1}{xyz}$ Тогда получим функцию систему уравнений.

$$\left\{\begin{aligned} 2x - 3y + cz &= 6 \\ 3z - 6x + cy &= 2 \\ 6y - 2z + cx &= 3 \end{aligned}\right. \quad \begin{array}{|c} 3 \\ + \\ 1 \\ + \\ 6 \end{array}$$

$$\begin{cases} 6x + 9y + 3cz = 18 \\ 3z - 6x + 6y = 2 \\ 36y - 12z + 6cx = 18. \end{cases} \quad \begin{array}{c} + \\ + \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (c-9)y + (3c+3)z = 20 \\ (3c-12)z + (36+c^2)y = 2c+18 \end{cases}$$

$$(c-9)y + (3c+3)z = 20$$

$$(36+c^2)y + (3c-12)z = 2c+18 \quad \begin{array}{|c} 3(c-4) \\ (c+1) \end{array} - \quad \begin{array}{|c} c^2+36 \\ c-9 \end{array} -$$

Чистовик №5

$$\begin{cases} [(c-9)(c-4)-(36+c^2)(c+1)]y = 20(c-4)-2(c+9)(c+1) \\ [3(c+1)(c^2+36)-3(c-4)(c-9)]z = 20(c^2+36-2(c+9)(c-9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\cancel{c^2}-13c+\cancel{36}-\cancel{c^2}-c^3-36c-\cancel{36}]y = 2\cancel{0c}-80-2c^2-\cancel{20c}-18 \\ 3[c^3+c^2+36c+36-c^2+13c-36]z = 20c^2+720-2c^2+162 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c^3+49c)y = 2c^2+98 \\ 3(c^3+49c)z = 18c^2+882 \end{cases}$$

$$\begin{cases} cy = 2 \\ cz = 6 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2}{c}$$

$$z = \frac{6}{c}$$

Подставим в первое уравнение:

$$2x - 3y + cz = 6$$

$$2x - \frac{6}{c} + \cancel{6} \overset{\Downarrow}{=} \cancel{6}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{c}}$$

Вершина к обозначению.   Чистовик № 6

$C = \frac{1}{xyz}$

$\Downarrow$

$C = \frac{1}{\left(\frac{3}{c} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{6}{c}\right)}$

$C = \frac{1}{\frac{36}{c^3}}$

$C = \frac{c^3}{36}$

$c^2 = 36$

$c = 6$ или $c = -6$

~~Ответ~~: $\Rightarrow$

1) $c = 6$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}$

$z = 1$

2) $c = -6$

$x = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{3}$

$z = -1$

Ответ: 1) $c = 6$; $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = 1$.

2) $c = -6$; $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{3}$; $z = -1$.

№ 5

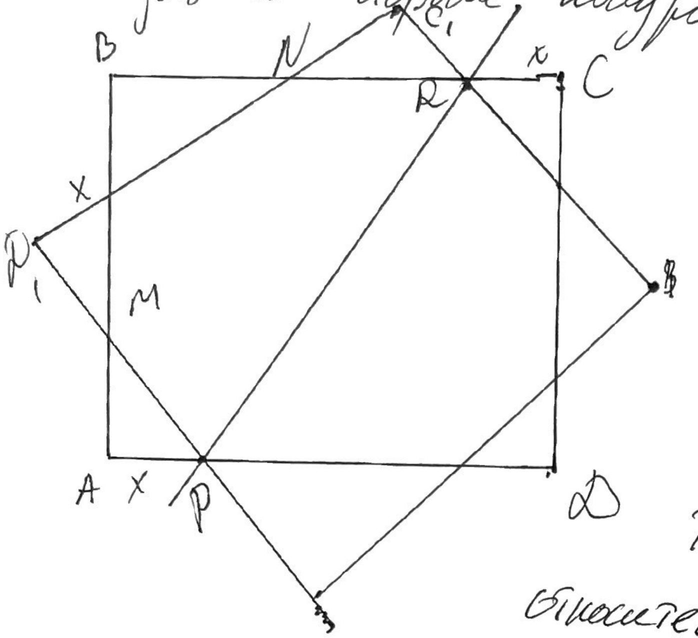
Дано.

$S_{квадрата} = 17$.

S_{max} фигуры – ?

Решение: Чистовик № 7

Пусть a – сторона квадрата.



~~Обозначим сторону~~ обозначим отрезок $AP = x$

Тогда $CR = x$.

Заметим, что $x < \frac{a}{2}$

Точки A_1, B_1, C_1, D_1 симметричные относительно вершинам квадрата A, B, C и D соответственно. относительно прямой PR.

Из симметрии следует, что прямоугольные треугольники AQP, MBN, NC_1R, QD_1M равны.

Получившаяся фигура $Ф = PAQD_1MBNC_1R$.

Её площадь равна сумме площадей трапеции (прямоугольной) PD_1C_1R и и двух равных прямоугольных треугольников AQP и MBN. Так как $A_1D_1 = a$, то $D_1P = a - x$. Тогда

$$S_{трапеции} = \frac{x + (a + x)}{2} \cdot a = \frac{a^2}{2}$$

Чистовик №8

Значит площадь фигуры Φ будет максимальной, если максимальной будет S треугольника AQP.

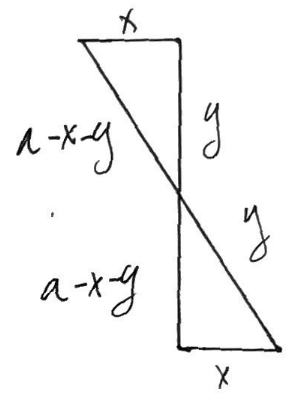
$$S_\Phi = S_{трап} + 2S_{AQP}$$

Треугольники D_1MQ и QAP равны.

Обозначим $MQ = QP = y$

по теореме Пифагора:

$$(a-x-y)^2 + x^2 = y^2 \quad (1)$$



Теперь надо найти максимум ф-ии (площади треугольника)

$$S_\Delta = \frac{(a-x-y)x}{2} \quad (2)$$

Проведем выкладки:

$$(a-x)^2 - 2(a-x)y + y^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow y = \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)}$$ (подставим во (2) выраж.)

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left(a-x - \frac{(a-x)^2+x^2}{2(a-x)}\right)x \quad (3)$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,\frac{2(a-x)^2-(a-x)^2-x^2}{2(a-x)}\cdot x \Rightarrow$$

Чистовик №9.

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-x)^2 - x^2}{2(a-x)} \cdot x \Rightarrow S_\Delta = \frac{a}{2} \frac{(a-2x)x}{2(a-x)} =$$

$$= \frac{a}{4} \cdot \frac{ax - 2x^2}{a-x}$$

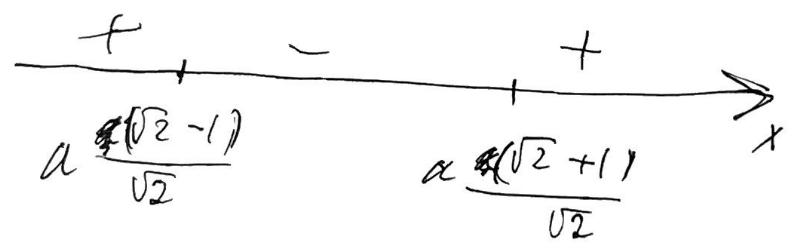
$$S_\Delta' = \frac{a}{2} \cdot \frac{(a-4x)(a-x) + (ax-2x^2)}{(a-x)^2} = \frac{a}{2} \frac{a - 5ax + 4x^2 + ax - 2x^2}{(a-x)^2} =$$

$$= \frac{a}{2} \frac{2x^2 - 4ax + a^2}{(a-x)^2} = \frac{a}{2} \frac{2(x^2 - 2ax + a^2)}{(a-x)^2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2(x-a)^2 - a^2}{(a-x)^2} = 0.$$

$$x - a = \frac{a}{\sqrt{2}} \;;\; x - a = -\frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$$

$$x = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$$

S'



$\Rightarrow$

$\Rightarrow a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ – точка максимума.

Получим максимальное значение площади

$$S_\Delta = \frac{a}{2} \frac{\left(a - \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}a\right)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{2\left(a - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a\right)} = \frac{a}{2} \frac{(a - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{\sqrt{2}(\cancel{\sqrt{2}a} - \cancel{\sqrt{2}a} + a)} =$$

$$= \frac{a}{2} \frac{(a - 2a + \sqrt{2}a)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)a}{\sqrt{2}a} = \frac{a}{2} \frac{(\sqrt{2}-1)^2 \cdot a^2}{2a} \quad \boxed{S_\Delta = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}}$$

Чистовик № 10.

Искомая площадь равна:

$$S = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{a^2}{2}(1+3-2\sqrt{2})$$

$$\boxed{S = a^2(2-\sqrt{2}).}$$

$$a^2 = 17$$

Ответ: $S = 17(2-\sqrt{2})$

20212223 ......

Черновик 16 гр

XI шифр

| — однозначные | трехзначные.

двузначные с 20 до 99 занимают в этом ряду места

всего их с 20 до 99 80 чисел

по 2 знака = 160 мест.

Трехзначные числа с 100 включая всего 900 чисел

900 по 3 зн 900 · 3 = 2700

Осталось 2021 — 160 = 1861 место

2700 > 1861

Раздельть 1860 на 3

620-3 значных.

~~...~~ 620 + 99 = 719 цифр.

в 700 до 719.

1860 + 160 = 2020 мест

2020 ... 1

ЯВ $\boxed{7}$20 место

$|x| - \arcsin x + b \cdot (\arccos x + |x| - 1) + a = 0$, B - любое

Чубикова N 12

B = 1 давайте

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$- \arcsin x + -1 (\arccos x - 1) + a =$

$= 1 - \frac{\pi}{2} + a = 0$ — $|x|$ arcsin x $\cdot$ 1 ($\arccos x + s$)

решение при $a = 1 - \frac{\pi}{2} \in R$.

~~все~~ $a = \frac{\pi}{2} - 1$

$|x| - \arcsin x + b (\arccos x + |x| - 1) + \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

$x = 1$.

$a = \frac{\pi}{2} - 1$

$2 \lg (x^2 - 3) = \lg_2 x^2 - 2$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$\underline{(x^2 - 3)^{\lg 2}} = x^2 - 2$ где 2.

$\beta = x^2 - 3$

$\alpha = \lg 2$

Черновик №13

$\alpha \geq 1$

$\beta^2 = (\beta+1)\alpha$

$\log_2 = \alpha$ $(\beta^2) = \alpha\beta\ \cancel{}\ 1\alpha$

$\beta \to 0$ $\quad >0.$

$\alpha \to \infty$

График функц β^2

гр

$f(\beta) = \beta^\alpha$ $\quad g\beta = \alpha(\beta+1)$

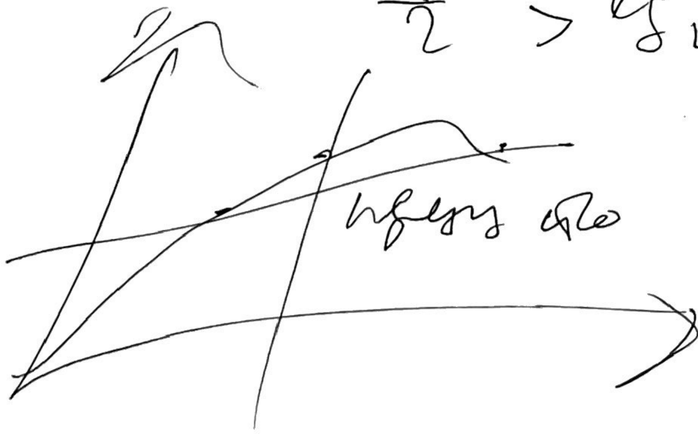
$f(0) = 0$

$g(1) = \alpha \Rightarrow f(0) < g(\ldots)$

$f(1) = 1$; $g(1) > \alpha$ $f(1) = g$.

$1 > 2\log$.

$\frac{1}{2} > \log_2 0$ всегда знач.



$x^2 = 3 + x$

Чистовик

$$\begin{cases} 2x - 3y + \dfrac{1}{xy} = 6 \\ 6z - 6x + \dfrac{1}{xz} = 2 \\ 6y - 2z + \dfrac{1}{yz} = 3. \end{cases}$$

Черновик № 14

7 + 886

1 + 2 сум.

Введу новую $c = \frac{1}{xyz}$ Тогда

тогда уравнения будут

$c = \frac{1}{xyz}.$

$$\begin{cases} 2x - 3y + cz = 6 \\ 3z - 6x + cy \\ 6y - 2z + cx = 3 \end{cases} \begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$6x + 3xy - 3cz = 18.$

$3z - 6x + 6y = 2$

$3y$ ... $= 8.$

$(c - 9)y + x(c - 3x) = 20.$

$z \cdot (3c - \ldots) + y \cdot (3c + c^3)$

$= 2c - 18.$

Черновик №15

$(c-9)y+(3c+3)z=6$

Зад 4:

c^2+36

$(36+c^2)y+(3c-12)z=$

$=2c+18.$

$6-9$

$|3(c+6)$

$(c-9)(c-4)-(c^2+36)(c+1)\cdot 2y=$

$=20(c-4-2(c+9)(c-4)).$

$c^2-13c+36-c^2-3(c-2)y=20c-80$

$3(c^2+c^2+36c+36-c^2+3c+3)z=20c^2+720-20c^2+182$

$\begin{cases} (c^3+43c)y \\ 3(c^2+43c)z=18c^2+88 \end{cases}$

$(c+2)\ 72\ yc^2$

$2x-3y+cz=6$

$2x-\frac{6}{c}+z=6$

$x=\frac{3}{c}$

$c=\frac{1}{xyz}$

$c=\frac{1}{\frac{3}{c}\cdot\frac{2}{c}\cdot 6}$

$c=\frac{1}{\frac{36}{c^3}}=\frac{c^3}{36}=$

$z=\frac{36}{c}$

$c^2=36$

$c=\pm 6$

Черновик №16

$C = 6$

$x = \frac{1}{2}$

$y = \frac{1}{3}$

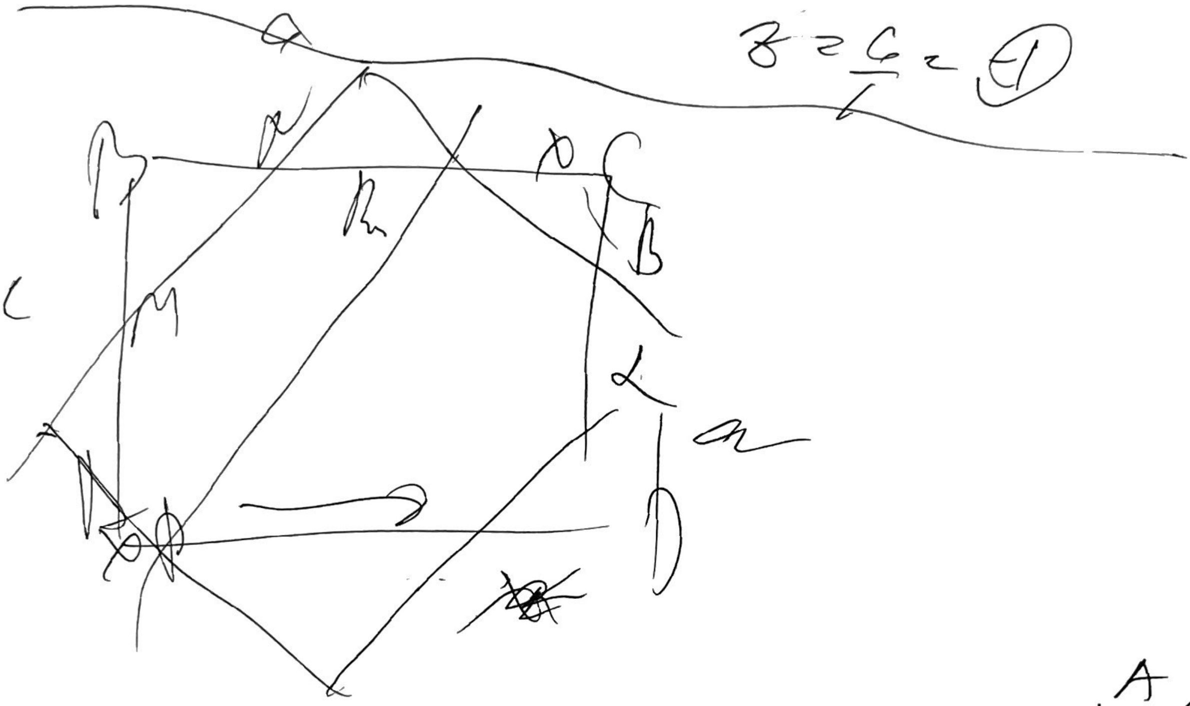
$z = 1$

$C = 6$

$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

$y = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$z = \frac{6}{6} = 1$



a — сторона

AP — x

$CQ = x$

$x < \frac{a}{2}$

$ABCD$ вырезано отрезком про PR.

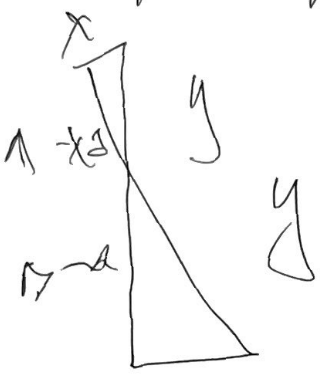
$A, y, ...$

$P = a \cdot x$

$S_{\text{пр}} = \frac{x \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}.$

$S_{\text{фигуры}} = S_{\text{тр}} + S_{\text{пр}}. = AQP + MQN$

$S_{QR} = S_{\square P} - S_{\triangle PQ}$ черновик N 17



D, M $Q = QDP$

$MR = y$

$QP = y$

(1) $(a - x - y)^2 + x^2 = y^2$

малый треуг

(2) $S_{\triangle} = \frac{(a-x-y)x}{2}$

$(a-x)^2 - 2(a-x)y + y^2 + x^2 = y^2$

$y = \frac{(a-x)^2 + x^2}{2(a-x)}$

(3) $S_{\triangle} \frac{1}{2} \left(a - x - \frac{(a-x)^2 + x^2}{\cancel{a} \, 2(a-x)} \right) x$

$2(a-x)$

$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(a-x)^2 - (a-x)^2 - x^2}{2(a-x)} \cdot x \Rightarrow$

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a-x)^2 - x^2}{2(\ldots)} x$ Черновик №18

$S_\Delta = \frac{a}{2} \frac{(a-2)x}{2a-4x}$

$S_\Delta' = \frac{a}{2} \frac{(a-4x\, a + \ldots)}{2(a-x)^2} = \frac{a}{2} \frac{(2(a - \ldots)}{(a-x)^2}$

$\frac{2x^2}{\quad} = \frac{a}{2} \frac{2x^2 - 4a + a^2}{(x-a)^2}$

$x - a = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $x - a = -\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$x = a\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$

$x = a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$

$+ \quad - \quad +$

$a \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \quad \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

$a\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ – точка max найди max значен   Черновик №19

$$\frac{\frac{a}{2}\left(a-\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}a\right)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{2\left(a-\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a\right)} =$$

$$= \frac{\frac{a}{2}\left(a-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a\right)\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}a}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}a-\cancel{\sqrt{2}a}+a\right)} = \frac{\frac{a}{2}(a-2a+\sqrt{2}a)}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}a}$$

$$= S_\triangle = \frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4}$$

$$S = \frac{a^2}{2} + 2\cdot\frac{a^2(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{a^2}{2}(1+3-2\sqrt{2})$$

$$S = a^2(2-\sqrt{2})$$

$$S = 17(2-\sqrt{2})$$