



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Есин Александр Михайлович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Есин Александр Михайлович

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	20 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

(41)

1) Рассмотрим числа $1, 2, 3, 4, 5$. Среди них есть три числа, которые не являются квадратами или кубами: $2, 3, 5$.

Значит нам надо искать такое число в последовательности $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, на 2025 месте т.к. $2025 = 45^2$, ближайшее к 2022

2) Рассмотрим послед-ость $1, 2, 3, \dots, a$.

$1, 2, 3, 4$ - тут 2 числа, которые являются ~~квадратами~~ ^{некоторого числа} квадратами: 1 и $4 \Rightarrow 1, 2, 3, 4 \rightarrow 2$ числа

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ - тут 3 числа, которые явл. квадратами некоторого числа ~~из них~~ $\Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 3$ числа.

и т.д. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в последовательности

$1, 2, 3, 4, \dots, a$

$\sqrt[2]{a}$ чисел, которые являются полными квадратами некоторых чисел

$\sqrt[3]{a}$ чисел, которые являются полными кубами некоторых чисел.

а также, ~~и~~ ^{из} заметим, что $\sqrt[6]{a}$, также ~~увеличивается, как~~ $\sqrt[2]{a}$ и $\sqrt[3]{a} \Rightarrow$ они войдут

3) ~~Рассмотрим~~ ~~несколько раз~~ $\Rightarrow$ мы вытислим их сразу

Заметим формулу, которой будет выражаться количество чисел в последовании, без учета полных квадратов и полных кубов: $1, 2, 3, 4, \dots, a$

$a - \sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a}$. решим у-е:

$a - \sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} = 2025$ для 2 случаев.

I) ~~или~~ $a < 45^2 = 2025$, тогда

$$a - \sqrt[2]{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} < 2025 - 45 - (\sqrt[2]{a} - \sqrt[6]{a}) \leq 2025 - 45 < 2025$$

II) $2 \cdot 116 = 46^2 > a \geq 45^2 = 2025$, тогда найдем что:

$$2197 = 13^3 > a > 12^3 = 1728$$

$$4096 = 4^6 > a > 3^6 = 729$$

$\Rightarrow$ найдем ограничения:

$$\left. \begin{array}{l} a < 45^2 \\ a > 12^3 \\ a > 3^6 \end{array} \right\} \text{отсюда} \Rightarrow$$

$$4) a - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} = a - 15 - 12 + 3 = a - 54$$

$$a - 54 = 2025$$

$a = 2079 \rightarrow$ это число окажется на 2022 месте
данной последовательности.

Ответ: 2079

(12)

$$1) \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} \quad \text{т.к. } \cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}$$

$$= \frac{1}{4 \sin 80^\circ} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} \sin 80^\circ} = \frac{1}{2 \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} \right) = \frac{1 \cdot \sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{2 \cos 40^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin(80^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 \Rightarrow \text{неравенство}$$

~~преобразовываем~~

$$2) (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos(1)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$$

! при $x=2$ ~~неравенство~~
выполняется

$\arccos$ определен на $[-1; 1]$, $\Rightarrow$

$$|x-1| \leq 1, \text{ поэтому } x \in [0; 2]$$

$$3) 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	8	4	-18	-9	
$\frac{1}{2}$	8	8	-14	-16	x
$-\frac{1}{2}$	8	0	-18	0	✓
$\frac{3}{2}$	8	16	6	0	✓
$-\frac{3}{2}$	8	0	-18	0	✓

воспользуемся схемой Горнера.

нужно проверить делит ли свободный член такие как: $\pm 3; \pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2} \dots$

± 3 и ± 1 не подходят т.к. разделились не получилось, поэтому проверим

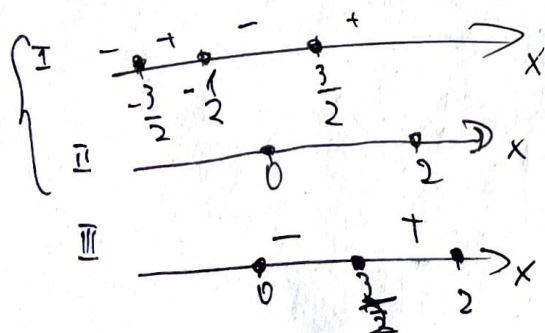
$\pm \frac{1}{2}$ и $\pm \frac{3}{2}$ по схеме Горнера.

Разложим в произведение:

$$8(x + \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) = (2x+1)(2x+3)(2x-3)$$

$$x \geq 0 \text{ при } x \in [\frac{3}{2}; 2]$$

$$x < 0 \text{ при } x \in [0; \frac{3}{2}]$$



4) Таким образом

Сумма $(8x^3 + 4x^2 - 58x - 9) \cdot \arccos(x-1)$ неотрицательна при $x \in [\frac{3}{2}; 2]$
 отрицательна при $x \in [0; \frac{3}{2})$

Сумма $\arccos(x-1)$ всегда неотрицательна

Значит

$$(8x^3 + 4x^2 - 58x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0 \quad \text{при } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

при $x = \frac{3}{2}$ и $x = 2 \Rightarrow$ ~~неравенство~~ неравенство выполняется $\Rightarrow$ включаем в ответ.

Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

(13)

1) Для решения поставленной задачи необходимо определить то, какая фигура вписана.

1. $AB = CD$ (по условию)

2. четырехугольник вписан

Значит, из ~~условия~~ приу-
пака вписанной четырех-
угольника следует, что

вписанная фигура - равнобокая трапеция, где AB и CD - боковые стороны.

Тогда пусть

$$AB = BC = CD = x$$

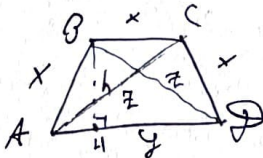
$$AD = y$$

$$AC = BD = z$$

выразим высоту этой трапеции в общем виде:

BH - основная высота

$$BH = h.$$



$$BH^2 = AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2$$

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

2) Диагонали трапеции выразим как:

$$AC^2 = BD^2 = BH^2 + \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2$$

$$z^2 = h^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{(y-x)^2}{4} + \frac{(x+y)^2}{4} =$$

$$= x^2 - \frac{y^2 - 2xy + x^2}{4} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = x^2 - \frac{1}{4}(y^2 - 2xy + x^2) + \frac{1}{4}(x^2 + 2xy + y^2) =$$

$$= x^2 + \frac{-(y^2 - 2xy + x^2)}{4} + \frac{(x^2 + 2xy + y^2)}{4} = x^2 + \frac{-y^2 + 2xy + x^2 + x^2 + 2xy + y^2}{4} =$$

$$= x^2 + \frac{4xy}{4} = x^2 + xy$$

$$z^2 = x(x+y)$$

z, x и $y \rightarrow$ натуральные числа

т.к. нам необо-

дится, тогда трапеция сформулирована. Тогда

рассмотрим возможные случаи:

лист 6 из 13

3) 1) $x=1$, тогда $3 \cdot 1 > y \Rightarrow y \in [1; 2]$

тогда $z^2 = x(x+y)$
 $\begin{cases} z^2 = 1(1+1)=2 \\ z^2 = 1(1+2)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ *нет целых решений*

2) $x=2$, тогда $3 \cdot 2 > y \Rightarrow y \in [1; 5]$
 $6 > y$

подставим в $z^2 = x(x+y)$
 $\begin{cases} z^2 = 2(2+1) \\ z^2 = 2(2+2) \\ z^2 = 2(2+3) \\ z^2 = 2(2+4) \\ z^2 = 2(2+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 6 \\ z^2 = 8 \\ z^2 = 10 \\ z^2 = 12 \\ z^2 = 14 \end{cases}$ *нет целых решений*

3) $x=3$, тогда $3 \cdot 3 > y \Rightarrow y \in [1; 6]$
 $9 > y$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$\begin{cases} z^2 = 3(3+1) \\ z^2 = 3(3+2) \\ z^2 = 3(3+3) \\ z^2 = 3(3+4) \\ z^2 = 3(3+5) \\ z^2 = 3(3+6) \\ z^2 = 3(3+7) \\ z^2 = 3(3+8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 12 \\ z^2 = 15 \\ z^2 = 18 \\ z^2 = 21 \\ z^2 = 24 \\ z^2 = 27 \\ z^2 = 30 \\ z^2 = 33 \end{cases}$ *нет целых решений*

4) $x=4$, тогда $4 \cdot 3 > y \Rightarrow y \in [1; 11]$
 $12 > y$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$\begin{cases} z^2 = 4(4+1) \\ z^2 = 4(4+2) \\ z^2 = 4(4+3) \\ z^2 = 4(4+4) \\ z^2 = 4(4+5) \\ z^2 = 4(4+6) \\ z^2 = 4(4+7) \\ z^2 = 4(4+8) \\ z^2 = 4(4+9) \\ z^2 = 4(4+10) \\ z^2 = 4(4+11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 20 \\ z^2 = 24 \\ z^2 = 28 \\ z^2 = 32 \\ z^2 = 36 \\ z^2 = 40 \\ z^2 = 44 \\ z^2 = 48 \\ z^2 = 52 \\ z^2 = 56 \\ z^2 = 60 \end{cases} \Rightarrow z^2 = 36$ *имеет целое решение*

4) $z^2 = 36$

$\begin{cases} z = 6 \\ x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$

отсюда перепишем уравнение $P = 3x + y = 12 + 5 = 17$

- 5) Убедимся, что $P_{ABCF} = 17$ наименьший
если $x \geq 5 \Rightarrow P_{ABCF} > 17$

~~Вспомогательное~~

Допустим I $x = 5, y = 1$

~~P_{ABCF}~~

$$z^2 = 5(5+1) = 30$$

II $x = 5, y = 2$

$$z^2 = 5(5+2) = 35$$

III $x = 5, y = 3$

$$z^2 = 5(5+3) = 40$$

и т.д., но эти формулы не работают
и т.к. нет решений в целых числах.

- 6) Таким образом получаем:

$$AB = BC = CF = x = 4$$

$$AF = y = 5$$

$$AC = BF = z = 6$$

$$P_{ABCF} = 17.$$

$$\text{Высота треугольника } BH = h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4-1}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{9}{4}} = \sqrt{15\frac{3}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 7}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

Потому мы можем найти угол α при основании:

$$\sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{x} = \frac{3\sqrt{7}}{2} : 4 = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Применим теорему синусов для тр-ка ABF .

$$\frac{BF}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{z}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\Rightarrow R = \frac{6 \cdot 8}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{6 \cdot 8}{\frac{3\sqrt{7}}{4}} = \frac{16\sqrt{7}}{1}$$

$$2R = \frac{6 \cdot 8}{3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{1}$$

$$R = \frac{8\sqrt{7}}{1}$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{8\sqrt{7}}{1}.$$

(14)

Дано:

1) a_n

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

$$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$$

~~Попробуем переписать (a_{n+1}) в иной вид~~

$$(a_{n+1})^3 = (a_n - 1)(a_n - 1)(a_n - 1) = (a_n^2 - a_n - a_n + 1)(a_n - 1) = a_n^3 - a_n^2 - a_n^2 + a_n + a_n - 1$$

$$= a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1$$

Заметим, что формула куба почти идентична данной, за исключением свободного члена, поэтому перепишем данную формулу $(n+1)$ -ого члена после итак $\rightarrow$

$$\Rightarrow a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$$

2) Пусть $a_n = 1 + x$, тогда

$$a_{n+1} = (1 + x - 1)^3 + 1 = x^3 + 1$$

и.к. $a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$, то найдем последовательности

$$a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$$

$$a_3 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^9$$

$$a_3 = \left(1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 - 1\right)^3 + 1 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1$$

$$a_4 = \dots$$

$$a_n = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} + 1$$

$$\textcircled{3} a_n \leq \frac{2022}{2021} \quad (\text{по условию}), \text{ откуда}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} + 1 \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$$

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$$

прологорифмируем по основанию $\frac{2021}{2022}$; знак меняется и.к. основание < 1

прологорифмируем по основанию 3; знак не меняется

$$\log_3 3^{n-5} \geq \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021} \right) \right) \quad \text{Чертков}$$

Исчт 9 из 13

$$n-5 \geq \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021} \right) \right)$$

$$n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021} \right) \right)$$

$$n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2022}{2021}} (2021) \right)$$

Отсюда, т.к. $a_n \leq \frac{2022}{2021}$, то
неравенство выполняется, а
значит такое натураль-
ное число n существует.

$$\log_3 \left(\log_{\frac{2022}{2021}} (2021) \right) \Rightarrow \text{натуральное}$$

Ответ: да, существует.

(15)

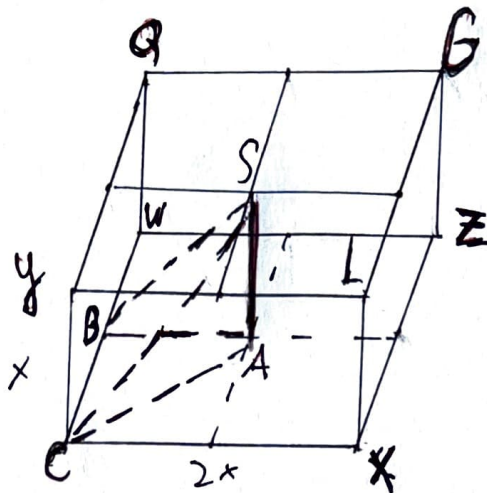
Дано:

 $SABC$ - пр-ая пирамида

Восстановим

 $SABC$ - пр-ой пр-ый пр-к.

рис 1



$$(SAB) \perp (ABC)$$

$$(SAC) \perp (ABC)$$

сфера (S, R)

$$R = AC$$

$$SA = AB = 2$$

1) Устроим пирамиду так, как показано на рис. 1, где $CXZWL6YQ$ - параллелепипед с высотой $CX = 2x$ и $CY = x$. Пирамида $SABC$ может быть описана симметрично относительно плоскости ABC по точке S . тогда найдем, какую часть объема ABC займем $SABC$.

$$2) V_{\text{параллелепипеда}} = 2x \cdot 2x \cdot x = 4x^3$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} x \cdot \frac{x \cdot x}{2} = \frac{1}{6} x^3$$

$$\frac{V_{\text{пр-инга}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{\frac{1}{6} x^3}{4x^3} = \frac{1}{24}$$

3) 1. Пирамида расположена симметрично относительно S .

2. S - центр сферы.

$$3. \frac{V_{\text{пр-инга}}}{V_{\text{куба}}} = \frac{1}{24}$$

Таким образом, объем (исключая тела) также $\frac{1}{24}$ часть объема тела, которое образуется пересечением заданной сферы (после её поворота см. рис 2.) и параллелепипеда.

$$\text{Радиус сферы: } R = AC = x\sqrt{2}.$$

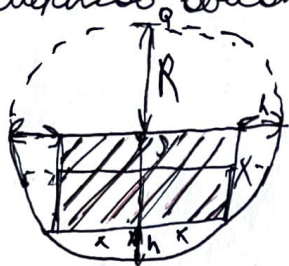
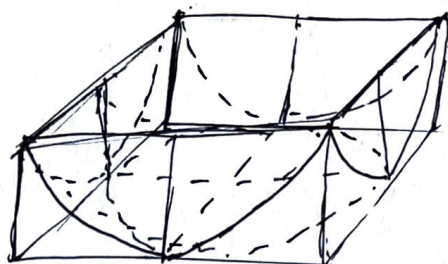
Определим фигуру, образованную этим пересечением:



Можно заметить, что получившаяся фигура - это ~~шар~~^{сфера} со срезанными шаровыми сегментами

Срезанные сегменты:

1. Верхняя половина сферы
2. Круглый, целый шаровой сегмент высотой h .
3. 4 боковых полукруглых шаровых сегмента высотой h .



$$V_{\text{шар. сегмента}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$

$$SQ = R = AC = x\sqrt{5}$$

$$h = x\sqrt{2} - x = x(\sqrt{2} - 1)$$

У нас шаровой сегмента $V = \pi h^2 R - \frac{h^3}{3} \pi = h^2 \left(\pi R - \frac{1}{3} \pi x \right) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$
 Также образуем объемные части сегментов:

$$V_{\text{полусферы}} = \frac{4}{3} \pi R^3 : 2$$

$$V_{\text{круг. шар. сег.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$

$$V_{\text{4 бок. пол. сег.}} = 4 \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) : 2$$

$$\begin{aligned} V_{\text{использ.}} &= V_{\text{шара}} - V_{\text{сегментов сверху}} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4 \pi R^3}{6} - \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) - \frac{4 \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)}{2} = \\ &= \frac{12}{18} \pi R^3 - 3 \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{6} \pi R^3 - 3 \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right) = \frac{4}{6} \pi x^3 \cdot 2\sqrt{5} - 3 \pi \cdot x^2 (\sqrt{2} - 1)^2 \left(x\sqrt{2} - \frac{x(\sqrt{2} - 1)}{3} \right) = \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{6} \pi x^3 - 3 \pi x^2 (2 - 2\sqrt{2} + 1) \left(x\sqrt{2} - \frac{(x\sqrt{2} - 1)}{3} \right) = \pi x^3 \left(\frac{8\sqrt{2}}{6} - (2 - 2\sqrt{2} + 1) \left(3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 \right) \right) = \\ &= \pi x^3 \left(\frac{8\sqrt{2}}{6} - (2 - 2\sqrt{2} + 1) (2\sqrt{2} + 1) \right) = \pi x^3 \left(\frac{8\sqrt{2}}{6} - (4\sqrt{2} + 2 - 8 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1) \right) = \\ &= \frac{\pi x^3}{6} (8\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 30) = \frac{\pi x^3}{6} (-16\sqrt{2} + 30) = \frac{2\pi x^3}{3} (15 - 8\sqrt{2}) = \\ &= \frac{\pi x^3}{3} (15 - 8\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Таким образом искомый объем равен:

$$\frac{\frac{\pi x^3}{3} (15 - 8\sqrt{2})}{24} \text{ т.к. } \frac{1}{24} \text{ часть объема тела ортогонального шара}$$

$$\text{а шар. сег.} \quad V = \frac{\pi x^3 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi \cdot 8 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$$

Чертовик Лист 12 из 13

Докажем, что найденный собор - собор большей части, исходящий в задане (больше половины).

$$\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9} \approx \pi \cdot \frac{15-8 \cdot 1,4}{9} \approx \pi \cdot \frac{15-12}{9} \approx \pi \cdot \frac{1}{3},$$

$\pi \cdot \frac{1}{3} > 1$ Значит уже нашим нужную нам часть.

Ответ: $\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9}$.

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x.$$

Заметим, что

$$|p| + |q| = \begin{cases} |p+q|, & \text{если } p \cdot q \geq 0 \\ |p-q|, & \text{если } p \cdot q \leq 0 \end{cases}$$

тогда $|p+q| < r \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |p+q| < r \\ |p-q| < r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q < r \\ -p+q < r \\ p-q < r \\ -p+q < r \end{cases}$$

Данное неравенство представим в виде разностной системы.

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x \\ x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x \\ -x^3 - 2x^2 - x - a + x^3 - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x \\ -x^3 - 2x^2 - x - a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x \\ 4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x \\ -4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 - 6x < 0 \\ 2a < 8x \\ -8x^2 - 8x - 2a < 0 \\ -2x^3 - 4x^2 - 2x - 8x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2 - 4x - 6) < 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ -2a < 8x^2 + 8x \\ x(2x^2 + 4x + 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ -a < 4x^2 + 4x \\ x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ 4x^2 + 4x + 1 + a > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x-1)^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ (x+\frac{1}{2})^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

① $a \leq 1$ ② $a > 1$

I $a \leq 1$, тогда условие задачи выполняется только когда

$$\frac{a}{4} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-a}{4}} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-a}}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} - 1 = 4 \Leftrightarrow 1-a = 25 \Leftrightarrow a = -24$$

II $a > 1$, тогда условие выполняется только когда

$$\frac{a}{4} = 2 \Leftrightarrow a = 8$$

Итак, $a \in \{-24; 8\}$

Ответ: $-24; 8$.

Чистовик

K1

1) Рассмотрим числа $1, 2, 3, 4, 5$. Среди них есть три числа, которые не являются квадратами и/или кубами каких-либо чисел: $2, 3, 5$.

Значит нам надо искать такое число в последовательности $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, на 2025 месте т.к. $2025 = 45^2$, ближайшее к 2022

2) Рассмотрим последовательность $1, 2, 3, \dots, a$.

$1, 2, 3, 4$ - тут 2 числа, которые являются квадратами некоторого числа: $1, 4 \Rightarrow$ из послед. $1, 2, 3, 4 \rightarrow 2$ числа

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \Rightarrow$ тут 3 числа, которые являются квадратами

некоторого числа $\Rightarrow$ из послед. $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \rightarrow 3$ числа

и т.д.

аналогичную операцию проводим для кубов и замечаем, что в последовательности $1, 2, 3, 4, \dots, a$

$\sqrt[2]{a}$ чисел, которые являются полными квадратами.

$\sqrt[3]{a}$ чисел, которые являются полными кубами.

А также заметим, что из $\sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{a}$, а это значит, что такие числа войдут в наши результаты дважды, поэтому мы должны это учесть и 1 раз добавить $\sqrt[6]{a}$.

3) Запишем формулу, которой будет выражаться кол-во чисел в последовательности без учета полных квадратов и кубов: $1, 2, 3, 4, \dots, a$.

$$a - \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a}$$

$$a - \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} = 2025 \text{ решим ур-ие для двух случаев.}$$

$$\text{I} \quad a < 45^2 = 2025, \text{ тогда } \text{о т.к. их кол-во одинаково.}$$

$$a - \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} < 2025 - 45 + (\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}) \leq 2025 - 45 < 2025$$

$$\text{II} \quad a < 46^2 = 2116$$

$$2025 = 45^2 \leq a < 46^2 = 2116 \text{ тогда найдем, что:}$$

$$2187 = 3^7 \leq a < 12^3 = 1728$$

$$4096 = 4^6 > a > 3^6 = 729$$

отсюда найдем ограничения:

$$\begin{cases} a < 45^2 \\ a > 12^3 \\ a > 3^6 \end{cases} \text{ отсюда } \Rightarrow$$

$$4) \quad a - \sqrt{a} - \sqrt[3]{a} + \sqrt[6]{a} = a - 45 - 12 + 3 = a - 54$$

$$a - 54 = 2025$$

$$a = 2079 \rightarrow$$

это число окажется на 2022 месте в данной последовательности.

Ответ: 2079.

N2

$$1) \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ}$$

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40^\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sin 40^\circ} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin(2 \cdot 40^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin(\frac{\pi}{2} - 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

$$\text{и т.к. } \cos 50^\circ = \cos(\frac{\pi}{2} - 40^\circ) = \sin 40^\circ$$

2) Тогда данное нам неравенство:

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos(1)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$$

преобразуется в
справа отменим, это при $x=2$
пер-о выносится и т.к.
 $\arccos(2-1) = \arccos 1 = 0$.

Ограничения:

$$\arccos(x) \text{ определен на } [-1; 1] \Rightarrow$$

$$|x-1| \leq 1 \Rightarrow x \in [0; 2].$$

$$3) 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

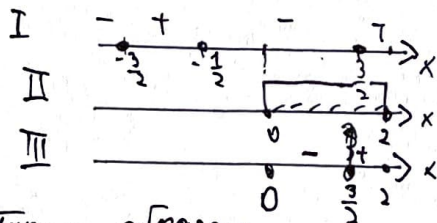
	x^3	x^2	x^1	x^0	
	8	4	-18	-9	
$\frac{1}{2}$	8	8	-14	-16	x
$-\frac{1}{2}$	8	0	-18	0	✓
$\frac{3}{2}$	8	16	6	0	✓
$-\frac{3}{2}$	8	0	-18	0	✓

воспользуемся схемой Горнера. Кучко про-
верим элементы вещественного числа: $\pm 3; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}$
 ± 3 и $\pm \frac{1}{2}$ не подходят, поэтому проверим
 $\pm \frac{1}{2}$ и $\pm \frac{3}{2}$.

таким образом:

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0 \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) = (2x+1)(2x+3)(2x-3)$$

Воспользуемся методом интервалов, чтобы определить промежутки
знаменосостояния:



$$x \geq 0 \text{ при } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

$$x < 0 \text{ при } x \in \left[0; \frac{3}{2}\right)$$

4) Таким образом:

$$\text{Сумма множителей } (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9)$$

$$\text{неотрицателен при } x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$$

$$\text{сумма множителей } \arccos(x-1)$$

$$\text{отрицателен при } x \in \left[0; \frac{3}{2}\right)$$

всегда неотрицателен

Значит

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0 \text{ при } \left[x \in \left[0; \frac{3}{2}\right) \right. \\ \left. \begin{matrix} x \in \{2\} \\ x \in \left\{\frac{3}{2}\right\} \end{matrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$$

и т.к. при $x = \frac{3}{2}$ и $x = 2$ пер-о
выносится.

Ответ: $x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$.

1) Определим фигуру, которая вписана.

$BC = AB = CD$ (по условию)
четырех-ик вписан

Значит их равные хорды стягивают равные дуги $\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD \Rightarrow$ это равно-

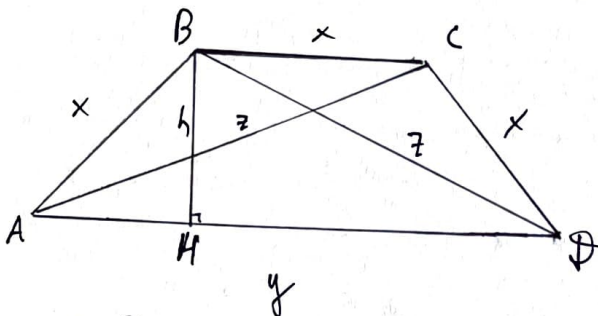
бокая трапеция, где AB и CD — боковые стороны.

Тогда пусть $AB = BC = CD = x$
 $AD = y$
 $AC = BD = z$

выразим высоту этой трапеции
в общем виде:

BH — исконая высота

$BH = h$



$$BH^2 = AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2$$

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2$$

2) Диагонали трапеции $AC = BD \Rightarrow$ выразим как:

$$AC^2 = BD^2 = BH^2 + \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{AD - BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AD + BC}{2}\right)^2$$

$$z^2 = h^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2 = x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{-(y^2 - 2xy + x^2) + (x^2 + 2xy + y^2)}{4} =$$

$$= x^2 + \frac{-y^2 + 2xy - x^2 + x^2 + 2xy + y^2}{4} = x^2 + \frac{4xy}{4} = x^2 + xy$$

$z^2 = x(x+y)$, предположим z, x и $y \rightarrow$ натуральные числа } т.к. нам необходимо, чтобы трапеция существовала.

$$3x > y$$

3) Поэтому рассмотрим возможные случаи: (как интервалом целые решения).

1. $x=1$, тогда $3 \cdot 1 > y \Rightarrow y \in [1; 2]$

$$3 > y$$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$$\begin{cases} z^2 = 1(1+1) = 2 \\ z^2 = 1(1+2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm\sqrt{3} \end{cases} \text{ нет целых решений}$$

2. $x=2$, тогда $3 \cdot 2 > y \Rightarrow y \in [1; 5]$

$$6 > y$$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$$\begin{cases} z^2 = 2(2+1) \\ z^2 = 2(2+2) \\ z^2 = 2(2+3) \\ z^2 = 2(2+4) \\ z^2 = 2(2+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 6 \\ z^2 = 8 \\ z^2 = 10 \\ z^2 = 12 \\ z^2 = 14 \end{cases} \text{ нет целых решений}$$

3. $x=3$, тогда $3 \cdot 3 > y \Rightarrow y \in [1; 8]$

$$9 > y$$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$$\left[\begin{array}{l} z^2 = 3(3+1) \\ z^2 = 3(3+2) \\ z^2 = 3(3+3) \\ z^2 = 3(3+4) \\ z^2 = 3(3+5) \\ z^2 = 3(3+6) \\ z^2 = 3(3+7) \\ z^2 = 3(3+8) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 12 \\ z^2 = 15 \\ z^2 = 18 \\ z^2 = 21 \\ z^2 = 24 \\ z^2 = 27 \\ z^2 = 30 \\ z^2 = 33 \end{array} \right]$$

нет
целых
решений

4) $k=4$, тогда $4 \cdot 3 > y \Rightarrow y \in [1; 11]$
 $12 > y$

подставим в $z^2 = x(x+y)$

$$\left[\begin{array}{l} z^2 = 4(4+1) \\ z^2 = 4(4+2) \\ z^2 = 4(4+3) \\ z^2 = 4(4+4) \\ z^2 = 4(4+5) \\ z^2 = 4(4+6) \\ z^2 = 4(4+7) \\ z^2 = 4(4+8) \\ z^2 = 4(4+9) \\ z^2 = 4(4+10) \\ z^2 = 4(4+11) \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 20 \\ z^2 = 24 \\ z^2 = 28 \\ z^2 = 32 \\ z^2 = 36 \\ z^2 = 40 \\ z^2 = 44 \\ z^2 = 48 \\ z^2 = 52 \\ z^2 = 56 \\ z^2 = 60 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow z^2 = 36$ имеет целое решение

4) $z^2 = 36$ $\begin{cases} z=6 \\ x=4 \\ y=5 \end{cases}$ отсюда периметр равен
 $P_{ABCD} = 2x+y = 12+5=17$

5) Убедимся, что $P_{ABCD} = 17$ невыполним.

если $x \geq 5 \Rightarrow P_{ABCD} > 17$, если $3x+y \leq 17 \Rightarrow x=5$, а $y=1$ или $y=2$

допустим I. $x=5, y=1$

$$z^2 = 5(5+1) = 30$$

II $x=5, y=2$

$$z^2 = 5(5+2) = 35$$

III $x=5, y=3$

$$z^2 = 5(5+3) = 40$$

$\Rightarrow y$ не может быть равна 3.

и т.д., но эти варианты не подходят т.к. нет решений $\Rightarrow P_{ABCD} = 17 \rightarrow$ невыполним.

6) Таким образом получаем, что $AB=BC=CD=x=4$

$$AD=y=5$$

$$AC=BD=z=6$$

$$P_{ABCD}=17$$

$$BH = h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y-x}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{\sqrt{63}}{2} = \frac{\sqrt{9 \cdot 7}}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{h}{x} = \frac{3\sqrt{7}}{2} : 4 = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Для тр-ка ABD применим теорему синусов:

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R \quad \frac{z}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow 2R = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} = \frac{48}{3\sqrt{7}} = \frac{16}{\sqrt{7}} = \frac{16\sqrt{7}}{7} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Ответ: $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

114

Дано:

$$a_n$$

$$a_1 = \frac{404^3}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

$$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$$

1) Перепишем a_n в иной вид:

$$(a_n - 1)^3 = a_n^3 - a_n^2 - a_n^2 + a_n - a_n^2 + a_n + a_n - 1 = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1$$

Заметим, что раскрывая куб разности мы получили формулу, которая отличается от a_{n+1} только свободным членом "-1". $\Rightarrow$

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$$

2) Пусть $a_n = 1 + x$, тогда $a_{n+1} = (1 + x - 1)^3 + 1 = x^3 + 1$

$$\text{т.к. } a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}, \text{ то получим } a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$$

$$a_3 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^9$$

$$\dots$$

$$a_n = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} + 1$$

3) $a_n \leq \frac{2022}{2021}$ (по условию), значит

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} + 1 \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} \leq \frac{1}{2021}$$

прологарифмируем обе части по основанию $\frac{2021}{2022} < 1 \Rightarrow$ знак меняется.

$$\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{(n-1)}} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021} \quad \text{т.к.}$$

$$3^{(n-1)} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right)$$

прологарифмируем обе части по основанию 3; знак не меняется.

$$n-1 \geq \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right)\right)$$

$$n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} 2021\right)$$

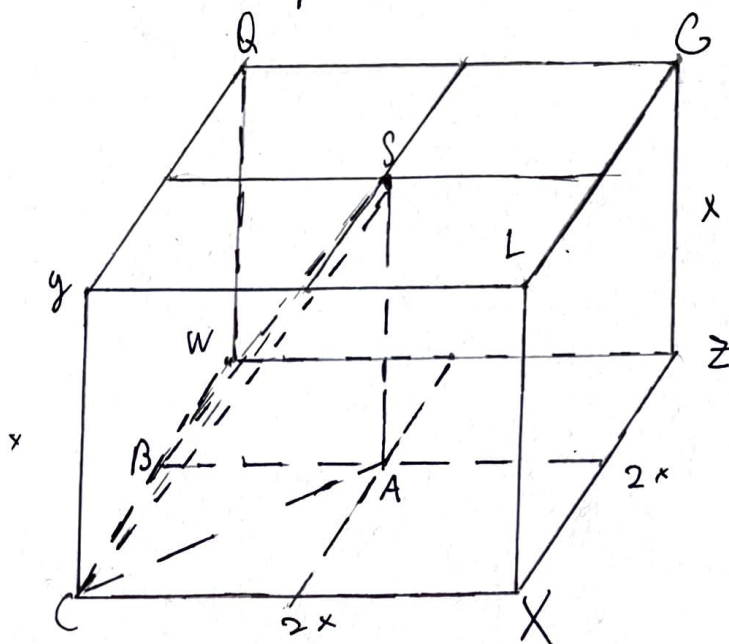
$$\log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} 2021\right) \rightarrow \text{положительное число}$$

отсюда, т.к. $a_n \leq \frac{2022}{2021}$, следует, что неравенство выполняется, а значит такое натуральное число n существует.

Ответ: да, такое число n существует.

N5

рис. 1



Дано:

$SABC$ - т.р. ае
пирамида

В основании

$SABC$ - р/б. т.р. ый п.р.-тик

$(SAB) \perp (ABC)$

$(SAC) \perp (ABC)$

сфера (S, R)

$R = AC$

$SA = AB = 2$

Решение:

- 1) Изобразим пирамиду так, как показано на рис. 1, где $CXZWLGYQ$ - параллелепипед со стороной $CX = 2x = CW$ $CY = x$

Пирамида $SABC$ может быть отрезана симметрично относительно точки S . Пирамиды, образующие параллелепипед будут находиться симметрично относительно S . Тогда найдем объем пирамиды, и найдем какую часть от объема $CXZWLGYQ$ он занимает:

$$2) V_{\text{пар-а}} = 2x \cdot 2x \cdot x = 4x^3$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h = \frac{1}{3} x \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6}$$

$$\frac{V_{\text{пар-а}}}{V_{\text{пир}}} = \frac{4x^3 \cdot 6}{x^3} = \frac{24}{1}$$

- 3) Пирамиды расположены симметрично относительно S .
2. S - центр сферы.

$$3. \frac{V_{\text{пир}}}{V_{\text{пар-а}}} = \frac{1}{24}$$

Поэтому искомый объем (иск. тела) составляет $\frac{1}{24}$ часть объема тела, которое образуется пересечением заданной сферы и параллелепипеда.

$$R_{\text{сферы}} = R = AC = x\sqrt{2}$$

- 4) Определим фигуру, образованную этим пересечением. см рис. 2

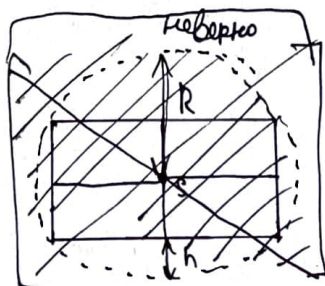
Лист 7 из 8

Чисто Век

Объем сферического сегмента
вычисляется по формуле
 $V_{\text{шар. сегмента}} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$

Можно заметить, что
печувствующая фигура - это сфера, со сре-
занными шаровыми сегментами:

1. Верхняя половина сферы
2. Нижний, целый шаровой сегмент
высотой h .
3. 4 Боковых полукруглых шаровых
сегмента высотой h .



$$SQ = R = AC = x\sqrt{2}$$

$$h = x(\sqrt{2} - 1)$$

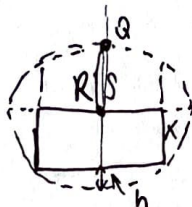
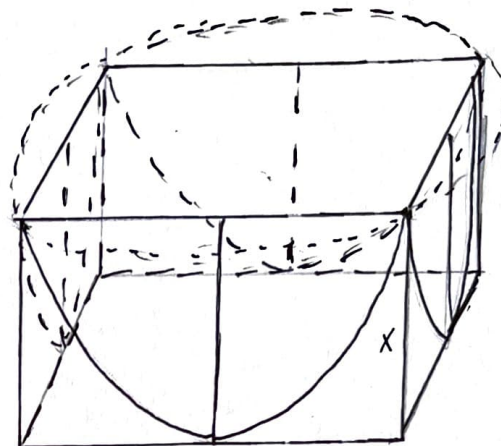


рис 2



$V_{\text{шарового сегмента}}$ вычисляется по формуле: $V = \pi h^2 R - \frac{h^3}{3} \pi = h^2 (\pi R - \frac{h}{3} \pi) = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$
Таким образом объем искомого сегмента:

$$V_{\text{полусферы}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{нижн. шар. сегм.}} = \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$$

$$V_{4 \text{ бок. пол. шар. сегм.}} = 4 \pi h^2 (R - \frac{h}{3})$$

$$\begin{aligned} \text{б) } V_{\text{искомый}} &= V_{\text{шара}} - V_{\text{сегмент. сверху}} = \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi R^3 - \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) - \frac{4}{2} \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) = \\ &= \frac{12}{18} \pi R^3 - 3 \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) = \frac{4}{6} \pi R^3 - 3 \pi h^2 (R - \frac{h}{3}) = \frac{4}{6} \pi x^3 - 2 \pi x^2 (2 - 2\sqrt{2} + 1) \cdot x \cdot (\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)}{3}) = \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{6} \pi x^3 - 3 \pi x^2 (2 - 2\sqrt{2} + 1) \cdot x \cdot (\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2}-1)}{3}) = \pi x^3 (\frac{8\sqrt{2}}{6} - (2 - 2\sqrt{2} + 1)(3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}-3}{3})) = \\ &= \pi x^3 (\frac{8\sqrt{2}}{6} - (2 - 2\sqrt{2} + 1)(3\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1)) = \pi x^3 (\frac{8\sqrt{2}}{6} - (2 - 2\sqrt{2} + 1)(2\sqrt{2} + 1)) = \\ &= \pi x^3 (\frac{8\sqrt{2}}{6} - (4\sqrt{2} + 2 - 8 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 1)) = \pi x^3 (\frac{8\sqrt{2}}{6} - (4\sqrt{2} - 5)) = \frac{\pi x^3}{6} (8\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 30) = \\ &= \frac{\pi x^3}{6} (-16\sqrt{2} + 30) = \frac{2\pi x^3}{6} (15 - 8\sqrt{2}) = \frac{\pi x^3 (15 - 8\sqrt{2})}{3} \end{aligned}$$

6) Таким образом искомый объем равен:

$$\frac{\pi x^3 (15 - 8\sqrt{2})}{3} \text{ т.к. } \frac{1}{3} \text{ часть объема тела, ограниченного ме-}$$

$$\text{ром и параболой. } V = \frac{\pi x^3 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi \cdot 8 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$$

7) Проверим, что найденный объем - объем большей части, искомого

б) Задача. ($\frac{1}{3} > \frac{1}{2} V$) - больше половины.

$$\frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9} \approx \pi \cdot \frac{(15 - 8 \cdot 1,41)}{9} \approx \pi \cdot \frac{15 - 11,28}{9} \approx \pi \cdot \frac{3,72}{9} \approx \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{3} > \frac{1}{2} \text{ значит мы нашли}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

1) Заметим, что
 $|p| + |q| = \begin{cases} |p+q|, & \text{если } a \cdot b \geq 0 \\ |p-q|, & \text{если } a \cdot b < 0 \end{cases}$

тогда $|p| + |q| < r \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |p+q| < r \\ |p-q| < r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p+q < r \\ -p+q < r \\ p-q < r \\ -p-q < r \end{cases}$$

Данное неравенство представим в виде равносильной системы.

$$2) \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x \\ x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x \\ -x^3 - 2x^2 - x - a + x^3 - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x \\ -x^3 - 2x^2 - x - a - x^3 + 2x^2 - x + a < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x \\ 4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x \\ -4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 4x^2 - 6x < 0 \\ 2a < 8x \\ -8x^2 - 8x - 2a < 0 \\ -2x^3 - 4x^2 - 2x - 8x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2x^2 - 4x - 6) < 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ -2a < 8x^2 + 8x \\ x(2x^2 + 4x + 10) > 0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ -a < 4x^2 + 4x \\ x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ 4x^2 + 4x + 1 + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x+1)^2 - 1 > -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3) \\ x > \frac{a}{4} \\ (x+\frac{1}{2})^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{1-a}{4}} - \frac{1}{2} = x$$

Рассмотрим 2 случая

① $a \leq 1$ ② $a > 1$

I. $a \leq 1$, тогда условие задачи выполняется только
 когда $\frac{a}{4} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-a}{4}} - \frac{1}{2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-a}}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-a} - 1 = 4 \Leftrightarrow 1-a = 25$
 $a = -24$

II. $a > 1$, тогда условие задачи выполняется только
 когда $\frac{a}{4} \geq 2 \Leftrightarrow a \geq 8$
 Итак, $a \in \{-24; 8\}$.

Ответ: $a \in \{-24; 8\}$.