МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Монастырский Максим Алексеевич**
Класс: **7-8**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Монастырский Максим Алексеевич

Класс: 7-8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

1. Черновик

№2

$$\frac{\frac{10}{x}\cdot 7+10}{2}=k \qquad \frac{35}{x}+10=k$$

$x\geq 7 \quad 11=k$

$15=k$

№3

$\overline{abc}-\overline{acb}$

$10b+c-10c+b=0$

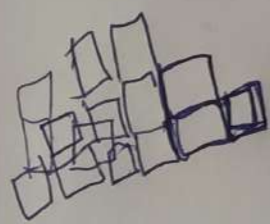
~~10b~~

$9b-9c=72$

$b-c=8$

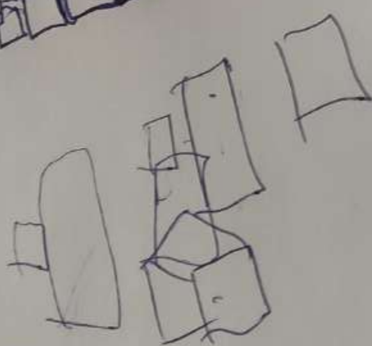
$b=9 \quad c=8$

$+3+2+2=7$



$x^2+y^2+2xy+\cancel{2xy}+x+3y=100$

$5^2\cdot 2^2$



$2+1$

0 1 4

П c = 6

П > 6Л

П > 6Л

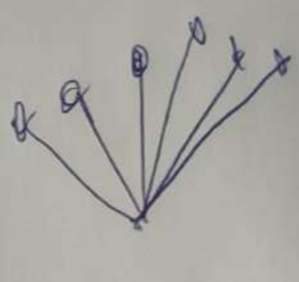
Л ≤ 6

Л ≤ 6

П ≤ 7К

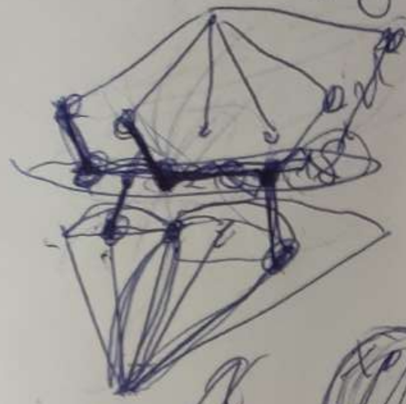
П ≤ 7К

Л ≥ 7К



2. черновик.

№6 3



~~40·19~~

0

17

1 —

~~17~~

18 − 1 + 2 + 2

21

3 − 1 + 2

~~41·40~~

3

№4

100 − 2 y

~~50 − 4~~

$x^2 \quad (x+y)^2 + x + 3y = 100$

~~4~~ ~~9~~ ~~16~~ ~~25~~ 36 49 ~~64~~ 81 ~~100~~

x+y=2 3 4 5 6 ~~7~~ ~~8~~ 9 ~~10~~

41·40

41·40

3. Чистовик.

№3

$\overline{abc} - \overline{acb} = 9b - 9c \,\vdots\, 72$

$\left[\begin{array}{l} b-c \,\vdots\, 8, b-c>0, \\ b-c=0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b-c=\pm 8, \text{ т.к. } 0 \le b \le 9 \text{ и } 0 \le c \le 9, \text{ т.к. } b \text{ и } c - \text{цифры} \\ b=c \end{array}\right.$

Т.к. b и c цифры, то существует 10 вариантов, когда $b=c$ и 4 варианта, когда $b-c=\pm 8$.
Сл-но для выбора b и c существует $10+4=14$ вариантов
Т.к. a – первая цифра трехзначного числа, то существует 9 способов её выбрать.
Сл-но всего таких трехзначных чисел – $9 \cdot 14 = 126$.
Ответ: 126.

№4

$(x+y)(x+y+1)+2y=(x+y)^2+(x+y)+2y=100$

Т.к. $x \in N$, $y \in N$, то $x+y \ge 2$ и $x+3y>0$.
Сл-но $\cancel{(x+y)^2 \ge}\ (x+y)^2<100$, $x+y<10$.
При $x+y=8$, $2y \le 14$, а сл-но $(x+y)^2+(x+y)+2y \le 64+8+14 = 86$
Очевидно, что при меньшем значении $x+y$, значение выражения $(x+y)^2+(x+y)$ будет уменьшаться,
как и значение $2y$, ведь $2y \le 2(x+y)-2$, ведь $x \ge 1$, а сл-но и значение $(x+y)^2+(x+y)+2y$ будет умень-
шаться и будет меньше 100
Остается вариант $x+y=9$

$\cancel{8+2}\ 9^2+9+2y=100$

$y=5$

$x=4$

Сл-но единственная пара – $(4;5)$.
Ответ: $(4;5)$.

4. Чистовик.

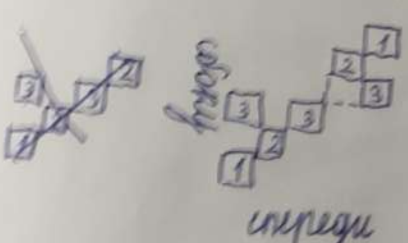
№5

Из вида спереди можно сделать вывод, что есть 3 башни высотой 3 кубика, 2 башни высотой 2 кубика.

Из вида сбоку можно понять, что есть еще 2-е башни высотой 1 кубик (остальные могут совпадать с башнями из вида ~~сто~~ спереди).

Сл-но минимум $3+2+2=7$ башен и 7 кубиков на виде сверху.

Пример ($\boxed{x}$ - означает, что на этом месте башня высоты x)



№2

Пусть было x работников, $x>7$

$\frac{10}{2x}$ - производительность за пол дня.

$\frac{10}{2x}\cdot 7=\frac{35}{x}$ - грядок вскопано за 2 день

$\frac{35}{x}+10$ - всего грядок

Т.к. грядок - целое число, то $35 \vdots x$.

$35 \vdots 1, 5, 7, 35$, т.к. $x>7$, то $x=35$ (если взять $x\geq 7$ (что все могли не работать), то есть вариант $x=7$ и тогда всего грядок $\frac{35}{7}+10=15$).

$\frac{35}{35}+10=11$

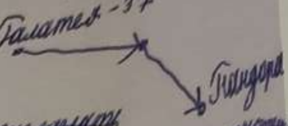
Сл-но всего 11 грядок.

Ответ: 11 (15) грядок.

5. Чистовик.

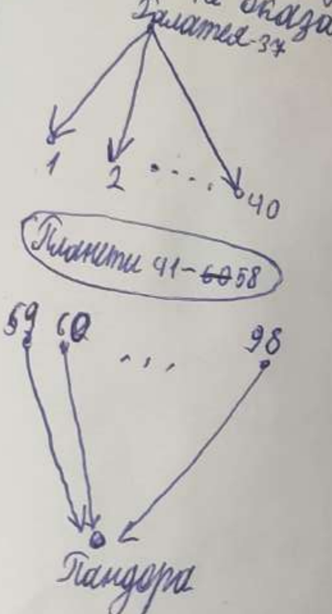
№6

Если есть прямой ~~*~~ портал из Галатей-37 на Пандору, то понадобится 1 ~~прыжок прыжо~~ прыжок, если такого портала нет, но есть такая конструкция:



Понадобится 2 прыжка (такие конструкции могут быть, ведь сначала можно ~~сделать~~ выбрать как распределятся порталы, а потом Галатею-37 и Пандору в соответствии с ~~констр~~ конструкцией)

Если такого не оказалось, то рассмотрим следующую конструкцию



Данная конструкция появляется из условия про то, что из каждой планеты исходят 40 ~~туннелей~~ порталов, и в каждую приходят 40 порталов.

Если из 1-40 планеты есть портал в 59-98 планету, то достаточно совершить 3 прыжка

~~В таком случае, есть~~ Предположим, что путь из Галатеи-37 в Пандору — есть, тогда он может ~~лех~~ лежать через любое кол-во планет из 41-58 (от 1 до 18), а сл-но от 4-ех прыжков до 21 прыжка.

Так-же есть вариант, когда пути нет. Разобьем планеты на 2-группы: Галтея-37 и 1-58, Пандора и 59-98.

В каждой группе кол-во исходящих порталов равно кол-ву приходящих порталов, а сл-но их можно провести в соответствии с условием так, что между группами нет порталов ведь в каждой группе 41 или более планет.

Ответ: от 1 до 21 прыжка, может вообще не добраться

5. Чистовик.

№

Если есть

прыжок, ес

Понодоби

выбрать

Если так

6. черновик.

7 или ~~более жителей 2 лжеца~~

~~6 или более жителей 2 пр~~

$R >$

$Р > 6Б$ $\quad Л < 6Б$

$Л \geq 7К$ $\quad П < 7Б$ $\quad \cancel{7Х}$

$Р \leq \cancel{6}7К$ $\quad П > (x-\cancel{6}5)\,Б$

$Л > (x-6)\,К$

$7 \quad \cancel{78}17 \quad 7П \quad 6 \quad П < 7$

$\cancel{7Л} \quad 8Л \quad Л < 8$

$П + Л \geq 8$

8

П П

7. Чистовик.

№ 1

Не может быть 7 рыцарей из утверждения 1, т.к. получаем, что каждый из них собрал больше, чем один из оставшихся 6, что невозможно. Аналогично из утв. 2 не может быть 8 лжецов.

~~Так же их количество ≥ 8, т.к.~~ если все не могут быть только рыцарями, ведь если взять рыцаря с самым большим количеством собранных кокосов, то утв. не верно, отсюда так-же следует, что лжецов хотя бы семь, ведь никто из рыцарей не собрал больше кокосов, чем наш рыцарь, а сл-но больше кокосов собрали только лжецы. Аналогично если взять лжеца с самым большим количеством бананов, то получаем, что есть рыцари и их хотя бы 6 (из утв. 1) сл-но если x - кол-во рыцарей, а y - лжецов, то $6 \le x < 7$ и $7 \le y < 7$, сл-но $x = \cancel{7}\,6$, $y = 7$, т.к. натуральные, и всего на острове живет $6 + 7 = 13$ человек.

Ответ: 13, 6 рыцарей, 7 лжецов.

Пример:

1Л 1б., 7к.	1Р 8б., 1к
2Л 2б, 8к	2Р 9б., 2к
3Л 3б., 9к	3Р 10б., 3к
4Л 4б., 10к	4Р 11б., 4К
5Л 5б., 11к	5Р 12б., 5К
6Л 6б., 12К	6Р 13б., 6К
7Л 7б., 13К	~~7К~~