



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Григорян Ани Игоревна**

Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Григорян Ани Игоревна

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

① Чистовик

Вариант 11-1

№1. Рассмотрим бесконечную последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$

Если в этой последовательности удалить все квадраты и кубы натуральных чисел, то полученная последовательность будет отличаться от заданной в условии задачи на 3 числа, добавитя 2; 3; 5. Поэтому в нашей последовательности нужно найти число, которое будет находиться на 2025-м месте ($2022 + 3 = 2025$).

В последовательности $1, 2, 3, 4, \dots, n$ будет

$[\sqrt{n}]$ чисел, являющихся ^{полными} квадратами;

$[\sqrt[3]{n}]$ чисел, являющихся полными кубами;

$[\sqrt[6]{n}]$ чисел, которое одновременно являются и полными квадратами, и полными кубами.

$\Rightarrow$ кол-во чисел в последовательности без полных квадратов и полных кубов будет равно:

$$n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}]$$

Решим полученное уравнение:

$$n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] = 2025$$

1) при $n < 2025 = 45^2$:

$$n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] < 2025 - 45 - ([\sqrt[3]{n}] - [\sqrt[6]{n}]) \leq \leq 2025 - 45 < 2025$$

2) при $45^2 = 2025 \leq n < 46^2 = 2116$:

$$12^3 = 1728 < n < 13^3 = 2197$$

$$\text{и } 3^6 = 729 < n < 4^6 = 4096$$

$$\Rightarrow n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] = n - 45 - 12 + 3 = n - 54 = 2025$$

$$n = 2079.$$

Ответ: 2079

③ Черновик

$$3^3 \cdot 2^3 = 6^3 = 216$$

~~$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline 216 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 216 \\ - 36 \\ \hline 180 \end{array}$$~~

$$-216 + 36 + 54 - 9$$

$$-8 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 18 \cdot \frac{1}{2} - 9 = -1 + 1 + 9 - 9 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 18) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 9) =$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x - 3)(2x + 3) = (2x + 1)(2x - 3)(2x + 3)$$

$$[n] - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[5]{n}]$$

$$\arccos(x-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-1| \leq 1 \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \\ -2 \leq x \leq 0 \\ x \in [-2; 0] \end{array} \right.$$

~~$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline 216 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ + 1690 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ + 1440 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ + 3840 \\ \hline 4096 \end{array}$$

© Б Черновик

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$$

$$a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$$

$$a_3 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^9$$

$$a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$$

$$a_n \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right) \Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}\right)_{\text{H}}$$

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right) \quad 3^{n-1} \geq -\log_{\frac{2021}{2022}} 2021$$

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2022}{2021}} 2021$$

(+)

(Да) $\rightarrow$ да.

© Б Черновик

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$$

$$a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$$

$$a_3 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^9$$

$$a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$$

$$a_n \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right) \Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}\right)_{\text{H}}$$

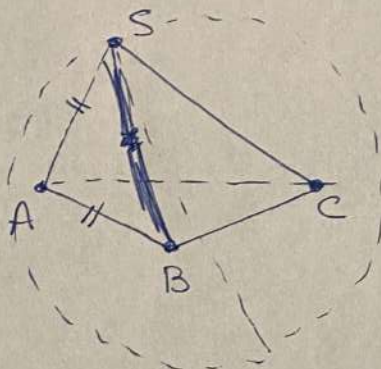
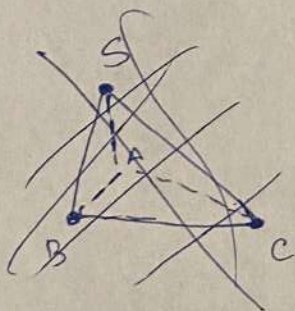
$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right) \quad 3^{n-1} \geq -\log_{\frac{2021}{2022}} 2021$$

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2022}{2021}} 2021$$

(+)

(Да) $\rightarrow$ да.

⑥ Мерзбур.



$$R = e\sqrt{2}$$

$$h = (\sqrt{2} - 1)e$$

пусть $e = AB \Rightarrow e = SA$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}e^3 - 6\pi(\sqrt{2}-1)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)e^3 =$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1.$$

I сомножитель кер-ва:

⊖ при ~~$x \in [0; 1.5]$~~ $x \in [0; 1.5]$

⊕ или ⊖ при $x \in [1.5; 2]$

II сомножитель берга ⊕ или ⊖.

$$\Rightarrow x \in [0; 1.5] \cup \{2\}.$$

② Числовик

№2. $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

Преобразуем правую часть неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} &= \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ} = \\ &= \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \\ &= \frac{\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \arccos 1 = 0$$

$\Rightarrow$ исходное неравенство принимает вид:

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

Левая часть неравенства определена на промежутке $x \in [0; 2]$, так как $|x-1| \leq 1$.

При этом условии первый сомножитель неравенства

неотрицателен при $x \in [1,5; 2]$;

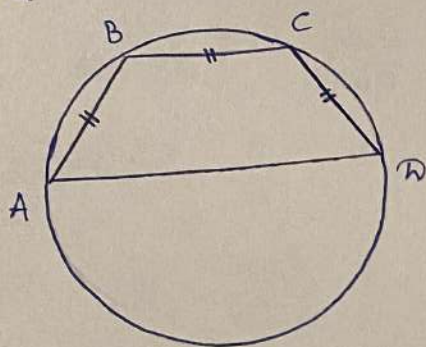
отрицателен при $x \in [0; 1,5)$

Второй сомножитель неотрицателен всегда.

$$\Rightarrow x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$$

Ответ: $x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$.

③ Чистовик
W3.



Так как $AB = CD$ (по условию)
и $ABCD$ — вписанной (по условию),
то $\Rightarrow ABCD$ — равнобедренная
трапеция (BC, AD — основания
трапеции).

Обозначим: пусть
 $a = AB = BC = CD$;
 $b = AD$;
 $c = AC = BD$
 $h = BH$ (высота трапеции).

По теореме Пифагора: $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$
 $\Rightarrow c^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab = a(a+b)$

$c^2 = a(a+b)$, a, b, c — натуральные

$3a > b \Rightarrow b \leq 3a - 1$

- 1) при $a=1$: $b \in [1; 2]$ и $c^2 = 1(1+b)$ — не имеет целых решений.
- 2) при $a=2$: $b \in [1; 5]$ и $c^2 = 2(2+b)$ — не имеет целых решений.
- 3) при $a=3$: $b \in [1; 8]$ и $c^2 = 3(3+b)$ — не имеет целых решений.
- 4) при $a=4$: $b \in [1; 11]$ и $c^2 = 4(4+b)$ — имеет решение $b=5$; $c=6$

$\Rightarrow P = 3a + b = 17$
(периметр)

5) при $a \geq 5$: $P > 17$, т.к. если $3a + b \leq 17$, то $a=5$. Но в этом случае либо $b=1$; $c^2=30$, либо $b=2$; $c^2=35$. Но оба этих варианта невозможны.

имеем: $AB = BC = CD = 4$
 $AD = 5$
 $AC = BD = 6$
 $P = 17$

$\Rightarrow h = \sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$;

и $\sin \angle A = \frac{3\sqrt{7}}{2 \cdot 4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

④ Учётчик
по мере синусов:

$$\frac{BD}{\sin \angle A} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} = 2R \Rightarrow R = \frac{6 \cdot 8}{6\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

W4. $a_1 = \frac{4043}{2022}$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$$

если $a_n = 1 + d$, то $a_{n+1} = 1 + d^3$

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 1 + \frac{2021}{2022}$$

$$\Rightarrow a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3;$$

$$a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$$

поскольку $a_n \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \left(\frac{1}{2021}\right) \Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}\right)$$

значит при любых $n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{\frac{2021}{2022}} 2021\right)$ выполняется неравенство.

Ответ: да, найдётся.

W6. $|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$

$$|a| + |b| = \max |a \pm b| = \max \{ \pm(a+b); \pm(a-b) \}$$

Данное в задании неравенство равносильно:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 + 8x \\ 4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x \\ -4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0 \\ x(x^2+2x+1) > 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x+1)^2 + a - 1 > 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x > \frac{a}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}$$

⑤ Чистовик

- 1) Если $a > 1$, то $1 - a < 0$ и заданное условие выполняется только при $\frac{a}{4} = 2 \Leftrightarrow a = 8 (> 1)$
- 2) Если $a \leq 1$, то $\frac{a}{4} < 2$ и заданное условие выполняется только при $\sqrt{1 - \frac{a}{4}} - \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = -24 (\leq 1)$.

Ответ: $a = -24$; $a = 8$

№5. дано: $SA = AB = a$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle ACB = 45^\circ$
 $(SAB) \perp (ABC)$; $(SAC) \perp (ABC)$ $r = AC$ — радиус
сферы с центром S .

$$\Rightarrow \angle SAB = 90^\circ; \angle SAC = 90^\circ$$

по т. Пифагора: $AC = 2\sqrt{AB} = 2\sqrt{2}$; $r = 2\sqrt{2}$ — радиус

$$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2\sqrt{2} = r$$

сфера пересекает ребро SB в т. B .

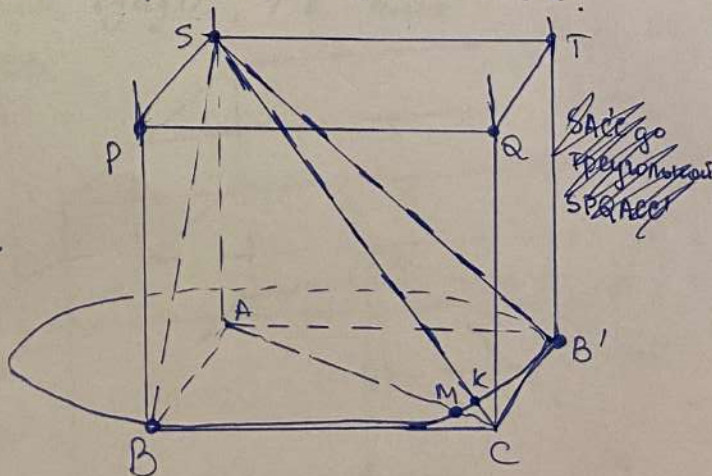
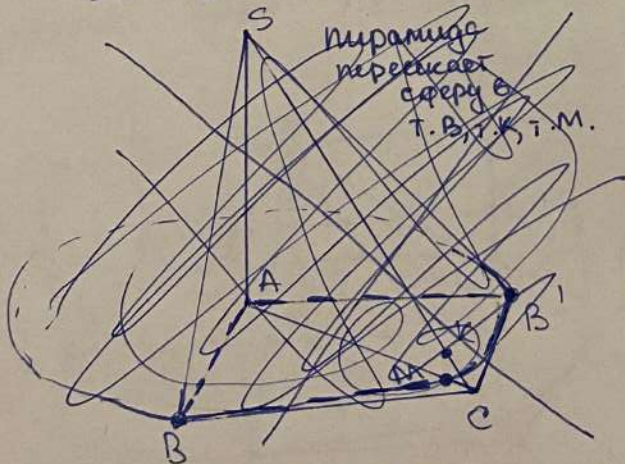
сфера пересекает AC в т. $M \Rightarrow SM = r = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BSM$ — равнобедренный

$$AM = \sqrt{SM^2 - AS^2} = 2; AM = AB = 2 \Rightarrow \triangle AMB \text{ — равнобедренный.}$$

$$SC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3} \text{ сфера пересекает } SC \text{ в т. } K.$$

$$\Rightarrow SK = r = 2\sqrt{2}$$



Построим симметричную пирамиду справа $SAB'C$
 $\angle BAB' = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$. Построим пирамиду $SB'CB'$ призм
 $SPQTB'CB'$. Она содержит 6 пирамид, равных $SAB'C$: у всех
вершина S , две пирамиды с основаниями в нижней
плоскости $SAB'C$; $SACB'$, две с основаниями в

а) Чепиовик

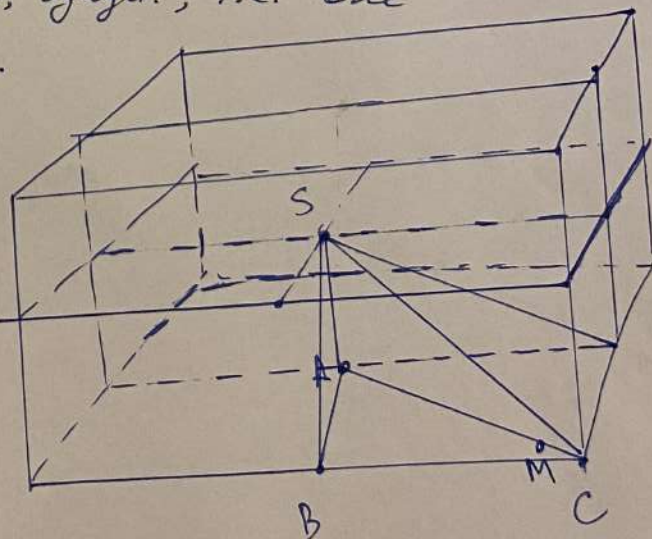
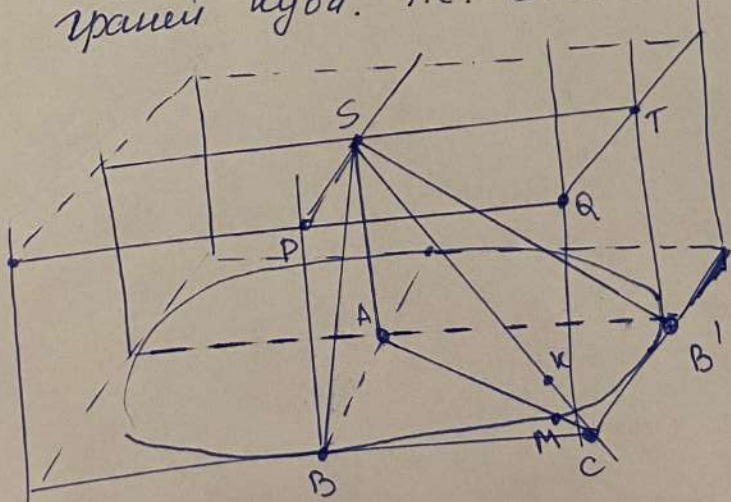
б) Чепиовик

передней $SPBC$; $SPAC$; где в правой $SQCT$; $STB'C$.

Прорезали призму. Вокруг SA $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$.
по кругу разместятся 4 такие же призмы. Это всё в
Значит, там 4.6 пирамид $SABC$.
внешней части сферы. Теперь такое же
разместим в верхней части. Значит, всего
внутри окажется $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ $SABC$ пирамид.

Призма $SPQTA BCB'$ является кубом. Приложим
ещё 4 куба по кругу. Значит, там 4.6
пирамид $SABC$. Затем ещё 4 куба
наложим сверху. Значит, всего внутри
большого куба окажется $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ $SABC$ пирамид.
Сфера с центром в $T.S$ имеет
радиус $AC=SB=SM$. Значит части сферы,

выходящие за куб — это сегменты:
Например, снизу это сегмент ниже указанной
окружности на внешней плоскости с центром A и
радиусом AB . Аналогично, такой же сегмент сверху
над кубом, справа, слева, спереди, сзади, т.е. вне
граней куба. т.е. 6 сегментов.



$r=SB=SH=SM=2\sqrt{2}$
сегмент: основание в $T.A$, вершина U , радиус $AB=2$
 $h=SH-SA=2\sqrt{2}-2$

⑦ Чистовик.

объём сегмента $V_1 = \pi h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3} \right) =$

$$= \pi \left(2(\sqrt{2} - 1) \right)^2 \cdot \left(2\sqrt{2} - \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{3} \right) = 16\pi (3 - 2\sqrt{2}) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{4\sqrt{2} + 2}{3} \right)$$

объём сферы $V_S = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{64}{3} \pi \sqrt{2}$

пересечение с кубом $V = V_S - 6V_1 = \frac{64}{3} \pi \sqrt{2} - 6 \cdot 16\pi (3 - 2\sqrt{2}) \cdot$

$$\cdot \left(\frac{4\sqrt{2} + 2}{3} \right) = \frac{64}{3} \pi (\sqrt{2} - 3(3 - 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} + 1))$$

объём внутри куба $V = \frac{16}{3} \pi (15 - 8\sqrt{2})$

пересечение пирамиды со сферой $\frac{V}{48} = \frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9}$

$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3}$ объём $\frac{V}{18}$ больше половины пирамиды.

Ответ: $\frac{\pi(15 - 8\sqrt{2})}{9}$.

① Черновик

№1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

↑
назано с ⑥.

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 4 &= 2^2 \end{aligned}$$

* 2; 3; 5 - остались до

$$2022 + 3 = \boxed{2025}$$

~~$$2022 + 3 = 2025$$~~

вопрос:

① $[\sqrt{n}]$ - цел (квадрат)

$[\sqrt[3]{n}]$ - цел (куб)

② $[\sqrt[6]{n}]$ - и квадрат, и куб

$$n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] = \boxed{2022+3} = 2025$$

~~$$2025 = 45^2$$~~

$$n < 45^2:$$

$$n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] < 2025 - 45 - ([\sqrt{n}] - [\sqrt[6]{n}]) \leq 2025 - 45 <$$

$$< 2025$$

$$45^2 \leq n < 46^2$$

$$(1728 =) 12^3 < n < 13^3 (= 2197)$$

$$(729 =) 3^6 \leq n < 4^6 (= 4096)$$

$$n - [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}] = n - 45 - 12 + 3 = n - 54 = 2025$$

$$n = 2079$$

Ответ ↑

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ + 384 \\ \hline 4096 \end{array} \quad \times 2$$

② Мерновик.

$$\textcircled{N^{\circ}2} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \\ & = \frac{(\cos 50^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ) : 2}{(4\sin 50^\circ \cdot \cos 50^\circ) : 2} = \frac{\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ}{\sin 2 \cdot 50^\circ} = \\ & = \frac{\sin 30^\circ \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 50^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(90^\circ - 10^\circ)}{\sin(90^\circ + 10^\circ)} = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

$$2) \quad 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 =$$

$$\begin{array}{r} 8+4-18-9 \\ \hline 12 \\ -8+4+18-9 \\ \hline 22 \\ -17 \end{array} \quad \begin{array}{r} 216 \\ + 36 \\ \hline \end{array}$$

$$8 \cdot 27 + 4 \cdot 9 - 18 \cdot 3 - 9$$