



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Табаченков Андрей Михайлович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Табаченков Андрей Михайлович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	10 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

№ 1.

[Веридит II-1]

[Гистових №1]

Заданное число окажется 2025-м в последовательности
2, 3, 5, 6, 7, 10, ... (то есть последовательности всех
натуральных чисел, кроме квадратов и кубов ~~и~~
ком. чисел). Пусть n - не полный квадрат и
не куб натурального числа.

Тогда n будет иметь в последовательности
следующий номер: $n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}]$,
([] - целая часть)

(по формулам
включения-исключения).

Заметим, что номер каждого числа последовательности
определяется однозначно. Тогда остаётся
подобрать такое n , что $2025 = n - [\sqrt{n}] - [\sqrt[3]{n}] + [\sqrt[6]{n}]$.

Это $n = 2079$

(действительно, $46^2 > 2079 > 45^2$
 $13^3 > 2079 > 12^3$
 $46 > 2079 > 3^6$).

Тогда $2079 - [\sqrt{2079}] - [\sqrt[3]{2079}] + [\sqrt[6]{2079}] =$
 $= 2079 - 45 - 12 + 3 = 2025$
ответ: 2079.

№ 2.

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} \right) =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

тогда $\arccos \left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} \right) = \arccos 1 = 0$.

Кроме того, заметим, что $\arccos(x-1) \geq 0$, $x \in [0; 2]$
(правильно понимается только при $x=2$)

$$6x^3 + 4x^2 - 16x - 9 = (2x+1)(4x^2 - 9) = (2x+1)(2x+3)(2x-3)$$

получаем равносильное неравенство:

$$(2x+1)(2x+3)(2x-3) \cdot \arccos(x-1) \leq 0 \text{ при } x \in [0; 2]$$

Тогда получаем грубое неравенство:

$$(2x-3) \cdot \arccos(x-1) \leq 0 \text{ при } x \in [0; 2] \\ (\text{т.к. } x-1 \geq 0)$$

Тогда при $x \in [0; \frac{3}{2}]$: $\arccos(x-1) > 0$, ~~$(2x-3) \leq 0$~~
(подходим)

при $x \in (\frac{3}{2}; 2)$: $\arccos(x-1) > 0$, $2x-3 > 0$
~~противоречие~~
(противоречие)

при $x = 2$: $\arccos(x-1) = 0$ (подходим)

ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

№ 3. Пусть $AB = BC = CD = x$

Пусть $\angle CAD = 2$. Тогда $\angle CBD = \angle CAD = 2$

$BC = CD \Rightarrow \angle CDB = \angle CBD = 2$

Тогда $BD = 2x \cos 2$

При этом $\angle BAC = \angle BDC = 2$

$AB = BC \Rightarrow \angle BCA = \angle BAC = 2$

(тогда $AC = 2x \cos 2 = BD$)

Тогда $\angle ACD = 180^\circ - \angle CAD - \angle CDA =$

$= 180^\circ - 2 - \angle CDB - \angle BDA =$

$= 180^\circ - 2 - 2 - \angle BCA = 180^\circ - 3 \cdot 2$

по теореме синусов:

$$AD = \frac{CD \cdot \sin \angle ACD}{\sin \angle CAD} = \frac{x \cdot \sin 3 \cdot 2}{\sin 2} =$$

$$= x(3 - 4 \sin^2 2) =$$

$$= x(4 \cos^2 2 - 1)$$

Тогда числа x , $2x \cos 2$, $x(4 \cos^2 2 - 1)$ — целые.

Значит, $\cos 2$ — рациональное число.

при $x=1$:

$$AD = 4\cos^2 \angle - 1 \in [1; 3]$$

(т.к. $\cos \angle < 1$, иначе $\angle = 2\pi k$ (кратное вращение))

Тогда $AD=1$ или $AD=2$: в обеих случаях $\cos \angle$ иррационально.

при $x=2$:

$$AD = 8\cos^2 \angle - 2 \in [1; 5]$$

при всех таких значениях AD $\cos \angle$ иррационально

при $x=3$:

$$AD = 12\cos^2 \angle - 3 \in [1; 8]$$

отсюда же $\cos \angle$ иррационально

при $x=4$:

$$AD = 16\cos^2 \angle - 4 \in [1; 11]$$

при $AD \leq 4$ $\cos \angle$ иррационально.

при $AD=5$: $\cos \angle = \frac{3}{4}$, $AB=BC=CD=4$, $AD=5$, $AC=BD=6$

Тогда при $x=4$ периметр не меньше $3 \cdot 4 + 5 = 17$

Пусть при $x=5$ периметр меньше 17.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 15 + AD &\leq 16 \\ AD &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AD &= 20\cos^2 \angle - 5 = 1 \\ \cos^2 \angle &= \frac{6}{20} = 0,3 \\ &\quad (\cos \angle \text{ - иррационально}) \end{aligned}$$

при $x \geq 6$ периметр больше 18.

Тогда минимальный периметр равен 17, который

он достигает только при $x=4$, $AD=5$, $\cos \angle = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \text{По теореме синусов } \frac{x}{2} &= 2R \sin \angle \\ x &= 2R \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

ответ: периметр 17
радиус $\frac{8}{\sqrt{7}}$

N 5.

вариант 104

~~(SAB) ⊥ (SAC)~~

$(SAB) ⊥ (ABC), (SAC) ⊥ (ABC)$

тогда $SA ⊥ (ABC)$

$$\text{Тогда } V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 = \frac{4}{3}$$

$$SA ⊥ (ABC) \Rightarrow SA ⊥ AB$$

$$\text{тогда } SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Пусть } K \in SC: SK = 2\sqrt{2}$$

$$M \in AC: \text{ ~~AK = 2\sqrt{2}~~ } AM = 2 \text{ (тогда } SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = 2\sqrt{2} \text{)}$$

тогда точки K, M, B лежат на сфере с радиусом $AK = 2\sqrt{2}$ и центром S.

тогда сфера делит пирамиду $SABC$ на пирамиду $SKMB$ и многогранник $ABMKCS$.

$$\text{тогда } \frac{V_{SKMB}}{V_{SABC}} = \frac{SK}{CS} \cdot \frac{KM}{CA} \cdot \frac{CB}{CB} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= 1 - \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}$$

$$\text{тогда объем большей части равен } V_{SABC} \cdot \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$\text{ответ: } \frac{4}{3} \cdot \frac{2+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

№ 4.

I) Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

её производная $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$

Поэтому функция $f(x)$ неубывающая
($f(x)$ возрастает монотонно
(при $\forall a > b: f(a) \geq f(b)$) при $x < 1$ и при $x > 1$)

~~Заметим также, что $a_{n+1} = f(a_n)$ при $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$~~

~~II) $a_2 - a_1 = a_1^3 - 3a_1^2 + 3a_1 - a_1 = a_1^3 - 3a_1^2 + 2a_1 =$~~

~~$= a_1(a_1^2 - 3a_1 + 2) = a_1(a_1 - 2)(a_1 - 1) =$~~

~~$= \frac{4043}{2022} \cdot \left(-\frac{1}{2022}\right) \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right) < 0$~~

~~$a_2 < a_1$~~

~~тогда $f(a_2) \leq f(a_1)$~~

~~$a_3 \leq a_2$~~

~~$f(a_3) \leq f(a_2)$~~

~~$a_4 \leq a_3$~~

~~$\dots$~~

~~и так далее. Поэтому, что $a_1 > a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \dots$~~

II) Пусть $a_n = 2 - x$. Тогда $a_{n+1} = (2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 3(2-x) =$
 $= 2 - f(x)$

тогда $a_1 = 2 - \frac{1}{2022}$

$a_n = 2 - \underbrace{f(f(\dots f(\frac{1}{2022}) \dots))}_{n-1 \text{ раз}}$

~~нужно $f^{(n)}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(\frac{1}{2022}) \dots))}_{n \text{ раз}}$~~

нужно $g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(\frac{1}{2022}) \dots))}_{n \text{ раз}}$

III) Докажем, что последовательность $g(0), g(1), g(2), g(3), \dots$

возрастающая, при этом $\begin{cases} g(i) < 1 \text{ при } \forall i, \\ g(i) > 0 \text{ при } \forall i \end{cases}$ ($g(0) = \frac{1}{2022}$)

Базис индукции: $g(0) = \frac{1}{2022}$
 $0 < g(0) < 1$

Переход: пусть $0 < g(k) < 1$ ($k \geq 0$)

тогда $g(k+1) = f(g(k)) < f(1) = 1$

$g(k+1) - g(k) = f(g(k)) - g(k) = g(k) \cdot (g(k) - 1)(g(k) - 2) > 0$

тогда $1 > g(k+1) > g(k) > 0$
 (2-е-г.)

Значит, последовательность $g(0), g(1), \dots$ имеет предел
 (функция монотонно возрастает и
 ограничена сверху)

Но тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n+1) = x$

$$x = x^3 - 3x^2 + 3x$$

$$0 = x(x-1)(x-2)$$

так как $0 < g(i) < 1$ при $\forall i$, $g(i)$ - возрастающая
 последовательность
 получаем, что $x \neq 0, x \neq 2$

тогда $x = 1$, значит $\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 1$

$$\begin{aligned} \text{тогда } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - g(n-1)) = \\ &= 2 - 1 = 1 < \frac{2022}{2021} \end{aligned}$$

то есть последовательность $a_1, a_2, \dots$,

монотонно убывает (т.к. $g(0), g(1), \dots$

монотонно возрастает), ограничена снизу

и имеет предел, равный 1. Значит

$\exists n$, при котором $a_n \leq \frac{2022}{2021}$

(тогда $|a_n| = a_n$, т.к. $a_1, a_2, \dots$ ограничена
 снизу и $a_i > 1 > 0$ при $\forall i$)

ответ: найдена

№6.

$$4x^2 + 8x > |x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \geq |2x^3 + 2x|$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 8x > 0 \\ 2x^2 + 4x > |x^3 + x| \\ x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty) \\ 2x^2 + 4x > |x(x^2 + 1)| \end{cases}$$

при $x < -2$: $2x^2 + 4x > -x^3 - x$
 $x^3 + 2x^2 + 5x > 0$
 $x(x^2 + 2x + 5) > 0$
 $x > 0$ (противоречие).

тогда $x > 0$.

1) если $a + 2x^2 \geq 0$.

пусть $z = x^3 + x$
 $t = a + 2x^2$

$$|z + t| + |z - t| \leq 4x^2 + 8x$$

~~если $z > 0$~~

тогда $z > 0 \geq -t$

если $t \geq z \geq -t$:

$$t \leq 2x^2 + 4x$$

$$\begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ a > x^3 - 2x^2 + x \end{cases}$$

$$0 > x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$0 > x(x-3)(x+1)$$

$$\frac{a}{4} < x < 3$$

то есть есть решения $x \in (\max(\frac{a}{4}; 0); 3)$
 при которых лев-во верно

тогда $3 - \frac{a}{4} = 1$
 $a = 8$

~~(при других значениях a)~~

ответ: 8

(репробук)

$$\frac{V_{\text{с кнб}}}{V_{\text{сам}}} = \frac{\mu}{\text{сб}} \cdot \frac{\mu}{\mu} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} =$$

$$-z < c$$

$$t > z^2 - c$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} < \frac{1}{2}$$

$$4x^2 \sqrt{3}x > 2|x^3+x|$$

$$2x^2 + 4x > |x^3+x|$$

$$0 > x^3 - 2x^2 - 3x$$

$$0 < x < 3$$

при $x > 0$:

$$x > \max(0, \frac{d}{a})$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 \sqrt{3}$$

$$x^3 + x = z$$

$$|2x^2 + a| = t$$

$$|z + t| + |z - t| < 4x^2 + 8x$$

$$\text{при } z < -t: -z - t - z + t < 4x^2 + 8x$$

$$-z < 2x^2 + 4x$$

$$2\sqrt{6} - 2\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{2} < \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} < 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{6} + 2\sqrt{2} < 2\sqrt{3} + 4$$

$$6 + 8 + 4\sqrt{12} < 16 + 12 + 24\sqrt{3}$$

$$14 + 8\sqrt{3} < 28 + 24\sqrt{3} \quad (\text{верно})$$

$$-2x^2 - a \leq x^3 + x$$

$$-a \leq x^3 + 2x^2 + x$$

$$x^3 + 2x^2 + x > x^3 + x$$

$$\frac{1}{2022} x > 0$$

$$x^3 + x \leq 2x^2 + a$$

$$f(x) =$$

$$f(f(x)) = f(x)$$

$$x^3 - 2x^2 + x = a < 4x$$

$$x^2 - 2x + 1 < 4$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x-3)(x+1) < 0$$

$$x < 3$$

$$d_1, f(d_1), \frac{f(d_2)}{a_3}$$

$$a_1 > d_2$$

$$f(a_1) > f(d_2) \Rightarrow d_2 > a_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(d_2) > f(a_3) \Rightarrow d_3 > d_4$$

и т.д.

$$d_1 > d_2 > d_3 > d_4 > \dots$$

$$\dots < d_3 < a_2 < -\frac{2022}{2021} < 0$$

$$\dots > |a_3| > |a_2| \quad \text{при } \frac{2022}{2021}$$

$$2 - f(\dots f(x)) \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\frac{2020}{2021} \leq f(x)$$

$$\frac{1}{1-x}$$

$$2 - f(f(x))$$

$$x < 1$$

$$f(x) < f(1) = 1$$

$$f(f(x)) < f(f(1)) = 1$$

$$2 - f(x) > -1 + 2$$

$$d_1 = 2 - x$$

$$d_1 = 1 - x$$

$$(1-x)^3 - 3(1-x)^2 + 3(1-x) =$$

$$= 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3 + 6x - 3x^2 + 3 - 3x + 3x^2 - x^3 =$$

$$= 1 - x^3$$

$$1 - \frac{1}{2022^3} < \frac{2022}{2021}$$

$$\frac{2022^3 + 1}{2022^3} < 1$$

$$(2-x)^3 - 3(2-x)^2 + 3(2-x) =$$

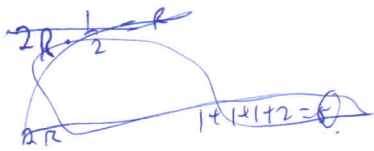
$$= (2-x)(2-x)^2 - 3(2-x) + 3 =$$

$$= (2-x)(4-4x+x^2 - 6+3x+3) =$$

$$= (2-x)(x^2 - x + 1) =$$

$$= 2x^2 - 2x + 2 - x^3 + x^2 - x =$$

$$= -x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = 2 - f(x)$$



$$2R \sin 2 = 1$$

$$\sin 2 = \frac{1}{2R}$$

$$AD = \frac{BD^2 - x^2}{x}$$

$$AD \cdot x = BD^2 - x^2$$

$$BD = 2x \cos 2$$

$$\cos 2$$

$$\text{type } x=1;$$

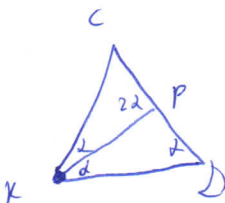
$$x^2 + AD \cdot x - BD^2 = 0$$

$$D = \frac{AD^2 + 4BD^2}{2}$$

$$\Delta CKP \sim \Delta CKD$$

$$\frac{CK}{CD} = \frac{CP}{CK} = \frac{KP}{KD} \quad x=2$$

$$CK^2 = CD \cdot CP \quad AD = 2 \cos 2 - x \neq 6$$



$$a = \sin 2$$

$$b = \sin 2$$

$$b^2 = 4 \sin^2 2 (1 - \sin^2 2) = 4a^2(1 - a^2) = 4a^2 - 4a^4$$

$$4a^4 - 4a^2 + b^2 = 0$$

$$4a^4 - 4a^2 + 1 + b^2 = 1$$

$$BD = 2x \cos 2$$

$$AD = x(4 \cos^2 2 - 1)$$

$$AD = 16 \cos^2 2 - 4 = 5$$

$$\cos^2 2 = \frac{9}{16}$$

$$\cos 2 = \frac{3}{4}$$

$$4 \cdot 3 + 5 = 17$$

$$20 \cos^2 2 - 5 = \frac{6}{20} \cdot \frac{3}{20}$$

$$d_1 = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$\frac{AD}{\sin 2} = \frac{x}{\sin 2}$$

$$d_1^3 - 3d_1^2 + 3d_1 \leq d_1$$

$$d_1^3 - 3d_1^2 + 3d_1 \leq 0$$

$$d_1^3 - 3d_1^2 + 3d_1 \leq 0$$

$$(d_1 - 1)(d_1 - 2) \leq 0$$

$$d_2 = d_1^3 - 3d_1^2 + 3d_1$$

$$= d_1(d_1 - 1)(d_1 - 2)$$

$$= (2 - \frac{1}{2022})(1 - \frac{1}{2022})(1 - \frac{1}{2022})$$

$$= (2 - \frac{1}{2022})(-\frac{1}{2022} + \frac{1}{2022^2})$$

$$12 \cos^2 2 - 3$$

$$\frac{11}{12}, \frac{10}{12}, \frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{7}{12}, \frac{6}{12}, \frac{5}{12}, \frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}$$

$$1 \leq 4x \cos 2 - x \leq 3x - 1$$

$$\cos^2 2 > \frac{1}{4}$$

$$16 \cos^2 2 - 4$$

$$\frac{5}{16}, \frac{6}{16}, \frac{7}{16}, \frac{8}{16}, \frac{9}{16}$$

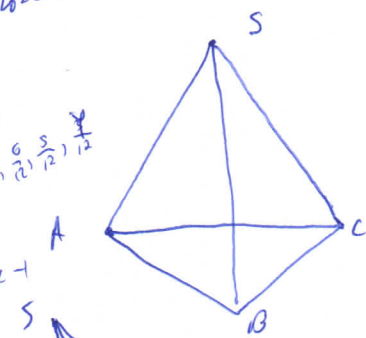
$$d_3 =$$

$$AD = 5$$

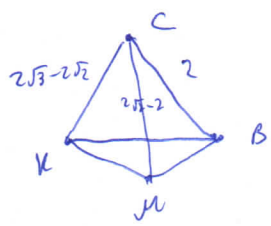
$$\cos 2 = \frac{3}{4}$$

$$x = 4$$

$$8 - \frac{3}{4} = 6$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$



$$BD = BC \cos 2 + CD \cos 2 = 2x \cos 2$$

$$\frac{2x \cos 2}{\sin 2} = \frac{AD}{3 \sin 2 - 4 \sin^3 2} = \frac{x}{\sin 2}$$

$$4 \geq 2R \sin 2 = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R \sqrt{3} \quad R = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$AD = x(3 - 4 \sin^2 2) = x(4 - 4 \sin^2 2 - 1) = -x + x \cdot \frac{BD^2}{x^2} =$$

$$\frac{BD}{x} = 2 \cos 2 \leq 2$$

$$AD \leq 2 - x$$

$$2 \leq AD + x \leq 2$$

$$AD = x = 1$$

$$\sin 32 \geq \sin 2$$

$$3 \sin 2 - 4 \sin^3 2 = \sin 2$$

$$2 \sin 2 = 4 \sin^3 2$$

$$1 = 2 \sin^2 2$$

$$\sin^2 2 = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{type } x=1:$$

$$AD = 4 \cos^2 2 - 1 \leq 3$$

$$\cos 2 \in (0, 1)$$

$$AD < 3$$

$$AD = 1$$

$$\frac{1}{2} = \cos^2 2$$

$$\cos 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 2 = \frac{1}{2}$$

$$\cos \angle KCK = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$Ka^2 = 4(5 - 2\sqrt{6}) + 4(3 - 2\sqrt{2}) - \frac{3}{4} = \cos^2 2$$

$$-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(2\sqrt{2})$$

$$4 \cos^2 2 = \frac{AD^2}{x^2}$$

$$\cos 2 = \frac{AD}{2x}$$

6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23,

24, 26, 28, 29, 30

$$23 - 4 - 2 + 1 = 18$$

2025

$$3^6 = 27^2 = 729$$

$$(16x^3 - 4x^2 - 18x - 9)$$

$$x = 5 - (\sqrt{x} + 2) - (3\sqrt{x} - 1)$$

$$\arccos(x-1) \leq \left(\frac{1}{x \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{x \cos 50^\circ} \right)$$

$$n: n - [\sqrt{n}] - [3\sqrt{n}] + [6\sqrt{n}]$$

$$4^3 = 64^2$$

$$\arccos\left(\frac{\sin 30^\circ \cos 50^\circ + \cos 30^\circ \sin 50^\circ}{2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right)$$

$$11 - 3 - 2 + 1 = 7$$

$$\arccos\left(\frac{\sin 80^\circ}{2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right)$$

$$n - [\sqrt{n}] - [3\sqrt{n}] + [6\sqrt{n}] = 2025$$

$$\arccos\left(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 50^\circ}\right)$$

$$49^2 = 50^2 + 1 - 100 = 2501 - 100 = 2401$$

$$49^2 = 2500 + 9 - 300 = 2209$$

$$\arccos(1) = 0$$

2080

$$48^2 = 50^2 + 4 - 200 = 2504 - 200 = 2304$$

$$48^2 = 2304$$

$$46^2 = 2500 + 16 - 400 = 2116$$

$$45^2 = 2500 + 25 - 500 = 2025$$

$$45^2 = 2025$$

8.10

$$4x^2(2x+1) - 9(2x+1) = (2x+1)(2x-3)(2x+3)$$

$$x - 45 = 12 + 9 = 2025$$

$$x = 2022 + 57 = 2079$$

$$x - 47 = 12 + 4 = 2025$$

$$x - 59 = 2021$$

$$x = 2080$$

$$44^2 = 1936$$

$$43^2 = 1849$$

$$42^2 = 1764$$

$$41^2 = 1681$$

$$40^2 = 1600$$

$$39^2 = 1521$$

$$38^2 = 1444$$

$$(2x+1) \cdot (2x-3) \cdot (2x+3)$$

$$\arccos(x-1) \leq 0$$

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$\arccos(x-1) \geq 0$$

$$\arccos(x-1) \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

$$\arccos(x-1) \leq 0$$

$$\arccos(x-1) = 0$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

$$6R \sin 2 + 2R \sin 32 =$$

$$= 2R(3 \sin 2 + \sin 32) =$$

$$= 2R$$

$$\sin 32 = \sin 2 \cos 30 + \cos 2 \sin 30 =$$

$$= \sin 2 \cos 30 + \cos 2 \sin 30 =$$

$$= 3 \sin 2 - 4 \sin^3 2$$

$$= 2R(6 \sin 2 - 4 \sin^3 2)$$

$$16^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$56^2 > 2078 > 55^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

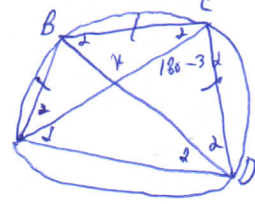
$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

$$46^2 > 2078 > 45^2$$

$$13^2 > 2078 > 12^2$$

N.B.



$$\triangle ABO = \triangle BOC = \triangle COD$$

$$\angle B = \angle C$$

$$\angle A = \angle D$$

ABCD - ромб

$$AC^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos(180 - 2\alpha) = 2x^2(1 + \cos 2\alpha)$$

$$AC = 2x \sqrt{1 + \cos 2\alpha}$$

$$AC = 2x \sqrt{1 + \cos 2\alpha}$$

$$AC^2 = 4x^2(1 + \cos 2\alpha) =$$

$$= 4x^2(1 + (1 - 2\sin^2 \alpha)) =$$

$$AC^2 = 4x^2 \cdot 4 \sin^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) =$$

$$= 4x^2 \cdot \frac{x^2}{4x^2} (1 - \frac{x^2}{4x^2}) =$$

$$= 4x^2 \cdot \frac{x^2}{4x^2} (1 - \frac{x^2}{4x^2}) =$$

$$= 4x^2 \cdot \frac{x^2}{4x^2} (1 - \frac{x^2}{4x^2}) =$$