



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Попов Ярослав Павлович**

Класс: **9**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Попов Ярослав Павлович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Пусть всего было k работников ($k \in \mathbb{N}$), каждый вскапывает за день N грядок, ~~всего~~ во второй день они вскопали x грядок ($x \in \mathbb{N}$).

В первый день они вскопали $k \cdot N$ грядок, потому что их k человек и каждый вскапывает N . Тогда $kN = 10$ (1)

Во второй день они вскопали $\frac{x \cdot N}{2}$ грядок, потому что работали полдня и всемером. Тогда $\frac{x \cdot N}{2} = x$, $xN = 2x$. (2). Разделим (1) (2):

$$\frac{k}{x} = \frac{10}{2x}$$

$$\frac{k}{x} = \frac{5}{x}$$

$$kx = 35. \quad (*)$$

В силу натуральности k и x уравнение $(*)$ справедливо только при $k=5$, $x=7$ или $k=7$, $x=5$. Поскольку во второй день работали не все работники, что ясно из условия, имеем $k < 7$. Тогда остаётся единственная возможность $k=5$ и $x=7$. Тогда всего было $10+7=17$ грядок.
 Ответ: 17 грядок.

N2

По определению десятичной записи числа: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$,
 $\overline{acb} = 100a + 10c + b$; $\overline{abc} - \overline{acb} = (100a + 10b + c) - (100a + 10c + b) =$
 $= 9b - 9c = 9(b - c)$.

По определению делимости условие $9(b - c) : 72$ равносильно существованию такого $k \in \mathbb{Z}$, что

$$9(b - c) = 72k$$

Это равносильно $b - c = 8k$; $(b - c) : 8$.

Стало бы нужно найти все числа $\overline{abc}$ для которых $(b - c) : 8$. (*)

Поскольку b и c — цифры, легко оценить $9 \geq b - c \geq -9$

Тогда имеем три возможности:

$$\begin{cases} b - c = 0 \\ b - c = 8 \\ b - c = -8 \end{cases}$$

Под первое равенство подходит пара $(0, 0)$; $(1, 1)$; ...; $(9, 9)$, всего 10 пар.

Итого 1 из 10

Под второе рав-во подходит пара $(9, 1)$ и $(8, 0)$

Под третье рав-во подходят пары $(1, 9)$ и $(0, 8)$.

Тогда существует 14 пар (b, c) , удовлетворяющих условию (*).

Поскольку цифра a может принимать любое из значений $1, \dots, 9$, её можно выбрать 9 способами.

Тогда искомого чисел существует $14 \cdot 9 = 126$

Ответ: 126 чисел.

N3

Заметим, что

$$2022 = (x+y)(x+y+1) + y > (x+y)(x+y+1)$$

$$2022 = (x+y)(x+y+1) + y < (x+y)(x+y+1) + x+y = (x+y)(x+y+2).$$

~~Выводим~~ Тогда справедливо двойное нер-во

$$(x+y)(x+y+2) > 2022 > (x+y)(x+y+1)$$

которое после замены $t = x+y$ приобретает вид

$$t(t+2) > 2022 > t(t+1).$$

Заметим, что функции $f(t) = t(t+2)$ и $g(t) = t(t+1)$ — квадратичные с вершинами в точках -1 и $-\frac{1}{2}$ соответственно, а также с положительным старшим коэффициентом, поэтому они строго возрастают на мн-ве $\mathbb{N}$.

~~Решим~~ Решим нер-ва по отдельности:

$$1) t(t+2) > 2022$$

$$t^2 + 2t + 1 > 2023$$

$$(t+1)^2 > 2023$$

Заметим, что $45^2 = 2025 > 2023$ и $44^2 = 1936 < 2023$. Тогда

$$t+1 \geq 45$$

$$t \geq 44 \quad (1)$$

$$2) t(t+1) < 2022$$

Заметим, что при $t=45$ $t(t+1) = 45^2 + 45 = 2070 > 2022$

а при $t=44$ $t(t+1) = 44^2 + 44 = 1980 < 2022$

Тогда в силу возрастания $t \leq 44$ (2)

Поскольку нер-ва (1) и (2) должны выполняться одновременно, имеем $t = 44$.

Обратная замена приводит к системе

$$\begin{cases} x+y=44 & (3) \\ (x+y)(x+y+1)+y=2022 & (4) \end{cases}$$

В которой после подстановки (3) $\rightarrow$ (4) получаем

$$44 \cdot 45 + y = 2022$$

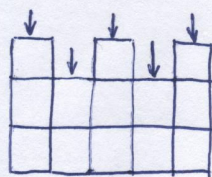
$$1980 + y = 2022$$

$$y = 42$$

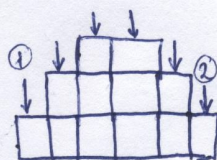
Откуда $x = 2$.

Ответ: (2, 42).

N4



спереди



сбоку

Стрелками отмечены те кубики, которые точно должны быть видны сверху (потому что над ними никого нет).

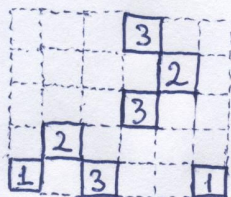
Оценка:

Всего отмечено 11 кубиков. ~~Всего~~ Посчитаем, какое наибольшее число кубиков может быть отмечено на обоих рисунках сразу.

Заметим, что кубики ① и ② не могут быть отмечены на первом рисунке, так как под ними нет кубиков, а на виде спереди под всеми кубиками есть кубики.

Тогда не более $6 - 2 = 4$ кубиков могут быть отмечены на обоих рисунках сразу. Тогда отмечено не менее 7 различных кубиков. Значит, на виде сверху изображено не менее 7 кубиков.

Пример:



Цифра в клетке означает количество стоек на ней кубиков. Так, например, цифра 2 означает такой столбик:



Ответ: 7.

Найдем, при каких a уравнение имеет корни в $\mathbb{R}$.

Это условие неотрицательности дискриминанта:

$$a^2 - 4 \cdot 2022 \geq 0.$$

$$a^2 \geq 8088.$$

Заметим, что $89^2 = (90-1)^2 = 90^2 - 180 + 1 = 8100 - 180 + 1 = 7921 < 8088$.

$$90^2 = 8100 > 8088.$$

Значит, в силу возрастания функции $f(a) = a^2$ на мн-ве натуральных чисел, ~~на~~ действительные корни будут при $a \geq 90$. По теореме Виета сумма корней уравнения $x^2 + ax + 2022$

равна $-a$. Тогда сумма действительных корней полученных уравнений равна $-(90 + 91 + \dots + 99)$.

Рассмотрим арифметическую прогрессию $\{x_n\}$ с первым членом $x_1 = 90$ и разностью $d = 1$. Тогда их сумма равна $-(x_1 + \dots + x_{10})$. По формуле суммы арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} -(90 + \dots + 99) &= -(x_1 + \dots + x_{10}) = -\left(\frac{x_1 + x_{10}}{2} \cdot 10\right) = -5(90 + 99) = \\ &= -5 \cdot 189 = -945. \end{aligned}$$

Ответ: -945 .

Р-м граф: вершины — планеты, АВ — ориентированное ребро, если есть портал из А в В. Очевидно возможна ситуация, когда понадобится 1 прыжок (Галаатея-37 и Пандора) соединены порталами, остальные распределены произвольно).

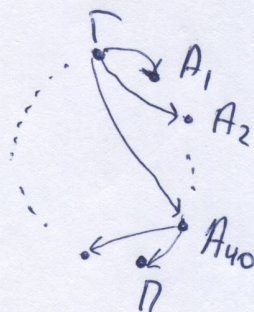
Пример на 2 прыжка:

Расположим вершины графа по кругу как показано на рисунке

Г — Галаатея-37

П — Пандора.

A_i — остальные вершины.



Соединим каждую вершину ~~с~~ исходящими рёбрами с 40 вершинами, стоящими далее по часовой. Тогда все условия выполнены, но при этом нет рёбра ГП (за 1 прыжок нельзя добраться) зато есть рёбра Г A_{40} и A_{40} П (за 2 можно)

Пример на 3 прыжка:

Обозначение аналогичные, расположение как на рисунке

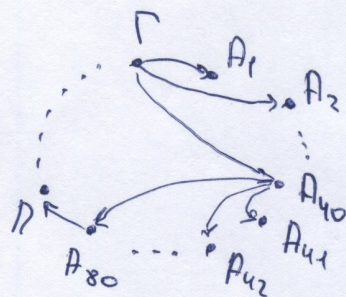
Соединяем аналогично, только теперь вершина П расположена следом за A_{80} .

За 1 прыжок из Галаатеи можно попасть в $A_1, \dots, A_{40}$

За 1 прыжок из $A_1, \dots, A_i$ (2 прыжка из Галаатеи) можно попасть в $A_2, \dots, A_{80}$.

Тогда за 2 прыжка попасть в Пандору нельзя, но за 3 можно:

$G \rightarrow A_{40} \rightarrow A_{80} \rightarrow P.$



Задача: Докажем, что 3 прыжков всегда хватит.

~~Решение:~~ Обозначим вершины:

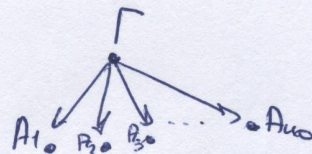
Γ - Галатея-37

Π - Пандора

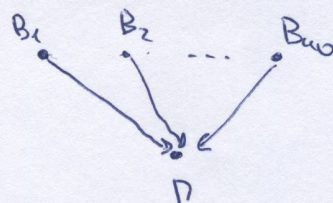
$A_1, \dots, A_{40}$ - вершины, в которые идут рёбра из Γ .

$B_1, \dots, B_{40}$ - вершины, из которых идут рёбра в Π .

$C_1, \dots, C_{18}$ - ~~вершины~~ все остальные вершины.



$C_1 \dots C_{18}$



Пусть 3 прыжков не хватит. Тогда из A_i рёбра могут вести только в A_j или в C_k (поскольку рёбро $A_i \Gamma$ невозможно, рёбро $A_i B_j$ означает наличие пути из 3 рёбер $\Gamma \rightarrow A_i \rightarrow B_j \rightarrow \Pi$, а рёбро $A_i \Pi$ означает наличие пути из 2 рёбер $\Gamma \rightarrow A_i \rightarrow \Pi$).

Из A_i выходит $40 \cdot 40$ рёбер.

Между вершинами A_i можно провести не более $\frac{40 \cdot 39}{2} = 20 \cdot 39$ рёбер, каждое из которых является исходящим из какой-то ~~не менее~~ вершины A_i .

Тогда из A_i в C_j выходит $40 \cdot 40 - 20 \cdot 39 = 20 \cdot 80 - 20 \cdot 39 = 20 \cdot 41$ рёбер.

Но в C_i входит $40 \cdot 18$ рёбер.

Противоречие: $40 \cdot 18 < 20 \cdot 41$

Значит, исходное предположение неверно и нужно не более 3 прыжков.

Ответ: 1, 2 или 3 прыжка.

Должны совершить А. Черновик

Черновик

I: k работников, каждый по N

$$k \cdot N \cdot t = 10$$

II: 7 работников, каждый по N , работают в 2 раза меньше

$$7 \cdot \frac{N}{2} \cdot t = x \quad ; \quad 7 \cdot N \cdot t = 2x$$

$$k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z} \quad \#$$

$$\frac{k}{7} = \frac{10}{2x} = \frac{5}{x}$$

$$kx = 35$$

либо 5 и 7, либо 7 и 5.

$k < 7$, тогда $k = 5$.

$$(\overline{abc} - \overline{acb}) : 72$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b - c)$$

$$9(b - c) : 72.$$

$$\begin{cases} b = c \\ b = c + 8 \end{cases} \quad b - c : 8.$$

$$\begin{cases} b = c, \\ b = 10, \\ c = 2, \\ b = 9, \\ c = 1, \\ b = 8, \\ c = 0. \end{cases}$$

$$(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$$

$$14 \cdot 9 = 90 + 36 = 126.$$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

$$(x+y)^2 + x+y+y = 2022$$

В силу натуральности $(x+y)(x+y+1) < 2022$

$$2022 = (x+y)(x+y+1) + y < (x+y)(x+y+1) + x+y = (x+y)(x+y+2)$$

$$t = x+y$$

$$t(t+2) > 2022 > t(t+1)$$

мат из 10

Черновик

$$t(t+2) > 2022 > t(t+1)$$

$$t^2 + 2t > 2022$$

$$t^2 + 2t + 1 > 2023$$

$$(t+1)^2 > 2023$$

$$t+1 \geq 45$$

$$t \geq 44$$

$$t^2 + t < 2022$$

$$t \leq 44$$

$$t = 44$$

$$x+y=44$$

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$44 \cdot 45 + y = 2022$$

$$1980 + y = 2022$$

$$y = 42$$

$$\boxed{x=2, y=42}$$

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

какие корни:

$$a^2 - 4 \cdot 2022 \geq 0$$

$$a^2 \geq 4 \cdot 2022 = 8088$$

$$88^2 = (80+8)^2 = 6400 + 2 \cdot 8 \cdot 80 + 64 =$$

$$= 6400 + 1280 + 64 =$$

$$= 7744$$

Черновик

$$44^2 = (40+4)^2 = 1600 +$$

$$+ 2 \cdot 40 \cdot 4 + 16 =$$

$$= 1600 + 320 + 16 =$$

$$= 1936$$

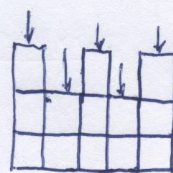
$$45^2 = (40+5)^2 = 1600 + 2 \cdot 5 \cdot 40 + 25 =$$

$$= 2025$$

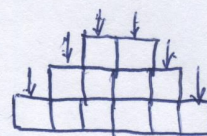
$$t=44 \text{ подходит, } 44^2 + 44 = 1936 + 44 =$$

$$= 1980 < 2022$$

$t=42$ не подходит



спереди



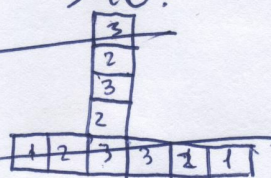
сбоку

Грелками те, что только есть.

~~Из них не более 1 совпадающего.~~

Тогда ≥ 10 .

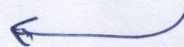
пример:



Из них не более 4 совпадающих.

Тогда ≥ 7

пример на 7



$$89^2 = (80+9)^2 =$$

$$= 6400 + 2 \cdot 9 \cdot 80 + 81 =$$

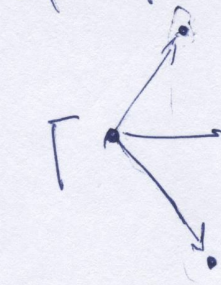
$$= 6400 + 1440 + 81 =$$

$$= 7921 < 8088$$

90

лист 8 из 10

~~приведен на 4 и на 5 нумер~~



~~Есть пример на 4.~~

Черновик

входит 40 (x+1)

исходит: 39 соседей Γ не более 2.

$$39 \cdot 2 + (39 - x - 39) \cdot (x+1)$$

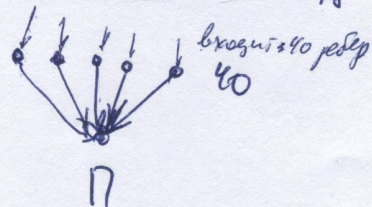
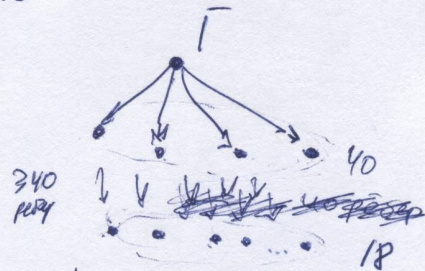
$$39 \cdot 2 + \underbrace{(60 - x)(x+1)}_{\text{ост. верш.}}$$

$$\text{исход} \leq 39 \cdot 2 + (60 - x)(x+1)$$

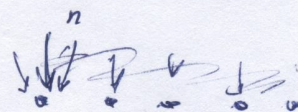
$$40x + 40 \leq \overline{78} 39 \cdot 2 + 60x + 60 - x^2 - x$$

$$\cancel{0 \leq} 0 \leq 38 + 20x + 60 - x^2 - x$$

$$-x^2 + 19x + 98 \geq 0.$$



82



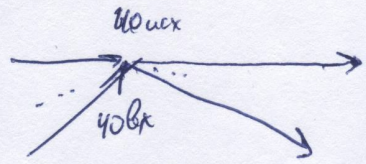
среди верхних соседей 20-39
исходит 40-40
~~40-40~~

наружу исходит $\geq$
 $40 - 40 - 20 \cdot 39$
 $20 \cdot 40 \geq$
 $= 20 \cdot 41$

лист 3 из 10

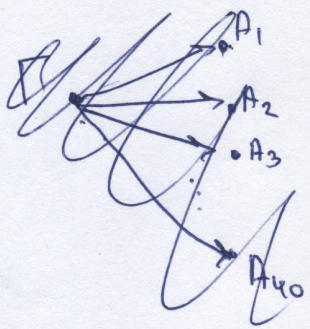
Черновик

44
4 789
5
945

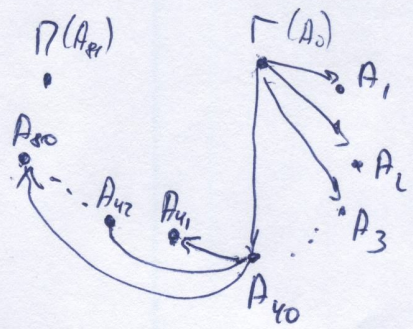
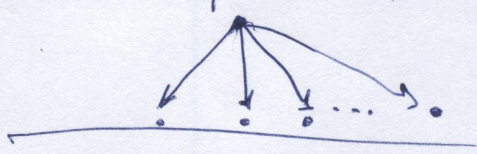


Может быть 1 прыжок

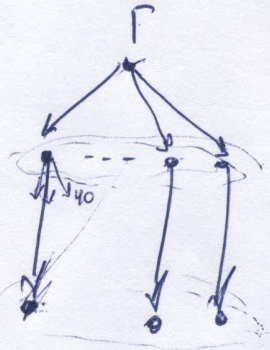
Может быть 2 прыжка



3 прыжка бывает ~~иногда~~



4 бывает?



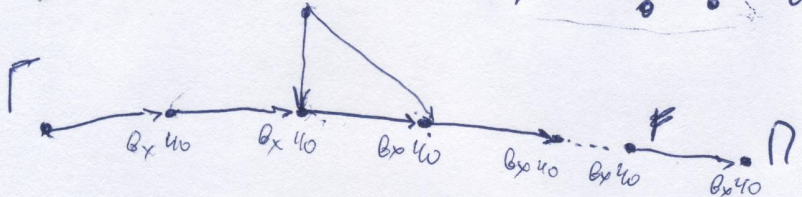
~~40-40-40-40~~

40

40-39

40-40

чел. 40-40



x порталов x+1 вершина
входит 40(x+1)

Оставшихся ~~40 99-40~~ 99-x

из них исходит ~~40 40~~

~~не более 3~~

~~40(99-x)~~

$$\begin{aligned} 40(x+1) &\leq 3(99-x) \\ 40x+40 &\leq 297-3x \\ 43x &\leq 257 \end{aligned}$$

~~исходит 3(99-x)~~

1 млт 10 мз 10