



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Григорян Артем Хачатурович**

Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Григорян Артем Хачатурович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

- $\sqrt{1}$) x - кол-во рядов
 y - кол-во человек
 t - время (потраченное за 1 день) (в часах)
 a - производительность 1 работника (кол-во рядов в час)

Заметим, что x, y - целые. Составим уравнения:

$$y t a = 10$$

$$7 \frac{1}{2} t a = x - 10.$$

$$x - 10 - \text{целое} \Rightarrow 7 \frac{1}{2} t a = 3,5 t a - \text{целое} \Rightarrow t a : 2.$$

Тогда поделим $y t a$ на 2:

$$\frac{y \frac{1}{2} t a}{7 \frac{1}{2} t a} = \frac{10}{x - 10} \Rightarrow \frac{y}{10,5} = \frac{10}{x - 10} \Rightarrow x y - 10 y = 105$$

$$\left. \begin{array}{l} y \frac{1}{2} t a = 5 \\ 7 \frac{1}{2} t a = x - 10 \end{array} \right\} \frac{y \frac{1}{2} t a}{5} = \frac{7 \frac{1}{2} t a}{x - 10} \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{7}{x - 10} \Rightarrow x y - 10 y = 35 \Rightarrow y(x - 10) = 35.$$

y и $x - 10$ - целые (причем $x > 10 \Rightarrow x - 10 > 0$) $\Rightarrow 35$; y и 35 ; $x - 10$, где y и $x - 10$ - делители.

Делители 35: 1, 5, 7, 35. y - все работники, 7 - не все $\Rightarrow y \geq 8 \Rightarrow y = 35 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x - 10 = \frac{35}{y} = \frac{35}{35} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 11}$

Ответ: 11

$$\sqrt{2) \quad \overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 10b + c - 10c - b = \overline{bc} - \overline{cb}.$$

$|\overline{bc} - \overline{cb}| < 100 \Rightarrow |\overline{bc} - \overline{cb}| = 72$ (т.к. : 72). Пусть $b > c$ (если $c > b$, то можем b и c поменять местами, т.к. от этого ответ не изменится).

$$\text{Тогда } \overline{bc} - \overline{cb} = 72 \Rightarrow b \geq 7 \Rightarrow b \in \{7, 8, 9\}.$$

Если $b = 7$:

$$\overline{7c} - \overline{c7} = 72$$

$$\Downarrow \\ c < 1 \Rightarrow c = 0, \text{ но } 70 - 7 \neq 72$$

$$\Downarrow \\ b \neq 7$$

Если $b = 8$:

$$\overline{8c} - \overline{c8} = 72$$

$$\Downarrow \\ c = 0$$

Если $b = 9$:

$$\overline{9c} - \overline{c9} = 72$$

$$\Downarrow \\ c = 1$$

Значит если $b \geq c$, то подходят $b = 8; c = 0$ и $b = 9; c = 1$. Если убрать ограничение $b \geq c$, то есть еще варианты $c = 8; b = 0$ и $c = 9; b = 1$. На каждый из таких вариантов есть 3 подходящих a (от 1 до 9; 0 брать не может, так как числа трехзначные). Тогда всего $3 \cdot 4 = 12$ вариантов.

Ответ: 36

Примечание: на каждое b может быть не более 1 подходящего c , так как меняя c , в $\overline{bc}$ меняется только кол-во единиц, а в $\overline{cb}$ - кол-во десятков $\Rightarrow$ ответы будут разные).

$$N3) (x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$y > 0$$

$$\Downarrow a$$

$$(x+y)(x+y+1) < 2022$$

$$a^2 + a < 2022 \Rightarrow a \leq 44$$

$$\Downarrow$$

$$x+y \leq 44 \Rightarrow y < 44$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 + a > 2022 - 44 = 1978 \Rightarrow a \geq 44$$

$$\Downarrow$$

$$44 \leq a \leq 44 \Rightarrow a = 44 = x+y$$

$$44 \cdot 45 + y = 2022 \Rightarrow 1980 + y = 2022 \Rightarrow y = 42 \Rightarrow x = 2$$

Ответ: $x=2$; $y=42$

N4) Ответ: 7

↓ сбоку

Пример:

спереди

цифра-высота
башенки

			3		
				2	
1			3		1
	2				
		3			

Оценка: Заметим, что сбоку мы увидели 6 башенок $\Rightarrow$ сверху все эти 6 башенок будут видны. Пусть мой ответ неверен. Тогда значит ответ 6. Значит ∇ сверху видны только те башенки, которые видны сбоку, но также известно, что

сверху видны все башенки (и никак не спрятаться за другими) $\Rightarrow$ башенки, которые видны сбоку, это все башенки замка. Тогда у нас всего 2 башенки высотой 3. Но вид спереди дает понять, что таких башенки минимум 3. Противоречие $\Rightarrow$ ответ хотя-бы 7. У.П.Д.

$$\sqrt{5) \quad x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$D \geq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2022 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 28088 \Rightarrow a \geq 90 \Rightarrow \text{корни появятся}$$

начиная с $a=90$. Тогда ~~каждый~~ каждое новое a дает 2 новых

корня, так как $D > 0$. Назовем корни парой, если они были получены

из одинакового a . Теперь просуммируем каждую пару. Возьмем

любое $a \in \{90-99\}$. Тогда его корни:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 8088}}{2} \\ x_2 &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 8088}}{2} \end{aligned} \right\} x_1 + x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Значит сумма пары, полученной из a будет равна a . Всего у нас 10 возможных a : с 90 по 99 $\Rightarrow$ ответ это сумма этих чисел.

Просуммируем: $90+91+\dots+99 = 90 \cdot 10 + 1+2+\dots+9 = \underline{945}$

Ответ: 945

№6) Ответ: 3

Оценка: назовем планету-37 А, а планету В. Из А можно вылететь в 40 планет.

(назовем их группа А). В планету можно телепортироваться из 40 планет (группа В).

Если А в группе В или В в группе А, то добраться можно за 1 прыжок. Если есть

планета, которая и в группе А, и в группе В, то добраться можно за 2 прыжка

(из А в эту планету и из нее в В). Пусть эти 2 случая у нас не случились. Тогда у нас 18

планет не в группах, причем они не А и не В (т.к. все планеты в группах разные). Посмотрим

на планеты группы А: из них идет $40 \cdot 40 = 1600$ путей в другие планеты. Если 1 из

этих путей идет в планету группы В, то добраться можно в 3 прыжка. Докажем что

такое найдется: Всего 1600 путей. Каждый из них идет либо в группу А, либо в группу

В, либо к остальным 18 планетам. Предположим противное, и нет путей в В. Тогда посмотрим

на кол-во путей только в А и остальные 18 планет (группа С). В каждую планету с нее идет 40

путей $\Rightarrow$ из группы А в нее не более $40 \cdot 18 = 720$ путей. Из А в А: Пронумеруем планеты от 1 до 40.

В планету 1 не более 39 путей из группы А. В планету 2 не более 38 (забыл сказать, что планеты нумеруются по убыванию кол-ва путей в нее из группы А). В планету 3 не более 37 $\dots$ В планету 40 не более 1.

Значит всего $1+2+3+\dots+39$ не более $1+2+3+\dots+39 = 40 \cdot 20 = 820$ путей $\Rightarrow$ всего путей из группы А в

группы А и С не более $720 + 820 = 1540$, что $< 1600 \Rightarrow$ есть планета группы А, в которую из

которой есть путь в планету группы В $\Rightarrow$ можно добраться за 3 прыжка. Ч.т.д.

Пример: расположим планеты по кругу и пронумеруем от 1 до 100, где планета А будет 1, а планета В будет 100. Из планеты с номером i будут пути в планеты с $i+1 \pmod{100}$ и $i-1 \pmod{100}$. Тогда за 2 прыжка из планеты А можно добраться максимум 90 планет $\Rightarrow$ потребуется еще

по крайней мере 2 прыжка. За 3 прыжка: $1 \rightarrow 41 \rightarrow 81 \rightarrow 100$. Ч.т.д.

Черновик

Лист 5 из 5

$$abc - acb = 100 \cdot a + 10b + c - 100a - 10c - b = 10(b-c) + c - b : 72$$

$$bc - cb = 72 \quad x+y: 0; \quad x+y \equiv 0; 2 \quad a(a+1) + a-x = 2022$$

$$b = 7, 8, 9$$

$$b=7 \Rightarrow 70 - c7 = 72$$

$$c=0 \text{ } 70$$

$$b=8, 9$$

$$8c - c8 = 72 \quad x^2 + 7x + 12 =$$

$$c=0$$

$$0 = 48 - 48 = 1$$

$$b=9$$

$$9 - 8 = 2 \quad \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$9c - c9 = 72$$

$$b=8; c=0 \quad a \in 1-9$$

$$91 - 19 = 72$$

$$b=9; c=1 \quad a \in 1-9$$

$$(x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

$$(x+y)(x+y+1) \geq 1980$$

$$x+y=44 \quad 1980+y=2022$$

$$y=42 \Rightarrow x=2$$

$$a^2 - 4 \cdot 2022$$

$$a^2 \geq 8088$$

$$a \geq 90$$

$$\frac{b \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$x_0 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8088}}{2}$$

$$\frac{1640}{2} = 820$$

$$1 \rightarrow 41 \rightarrow 81 \rightarrow 100 \quad a - \text{кол-во рядков} \quad 1600 \quad 6 \text{ рас}$$

x - кол-во рядков
y - кол-во работников
1 день: $y \pm a = 10$

$$7 \frac{1}{2} \pm a = x - 10$$

t - 1 день

$$\frac{y}{3,5} = \frac{10}{x-10}$$

$$\frac{2y}{7} =$$

$$40 \cdot 18 = \begin{matrix} x=12 \\ x=11 \\ x=15 \\ x=20 \end{matrix}$$

$$= 400 + 320 = 720$$

$$xy - 10y = 35$$

$$\frac{y}{10} = \frac{3,5}{x-10}$$

		3	
			2
1		3	1
	2		
		3	

$$\begin{matrix} 6 \\ \times 88 \\ 104 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 89 \\ \times 89 \\ 82 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 45 \\ \times 46 \\ \hline 270 \\ + 180 \\ \hline 2070 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 43 \\ \times 44 \\ \hline 172 \\ + 172 \\ \hline 1892 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 42 \\ \times 43 \\ \hline 276 \\ + 840 \\ \hline 1806 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 44 \\ \times 45 \\ \hline 220 \\ + 176 \\ \hline 1980 \end{matrix}$$