



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Ильин Андрей Павлович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Ильин Андрей Павлович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	5 баллов	0 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Nº 6 (мисл 2)

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0, 3)$$

$N \in \mathbb{N}$ (мет₂)

Пусть $a_1^2 - 3a_1 + 3 = K_1$, заметим, что для всех элементов последовательности аналогичное выражение $\leq K_1$, т.е. в OD_3 последовательности нет чисел более близких к границе ^{отрезка} последовательности $(1; 2)$

и очевидно $K_1 < 1$, тогда $a_3 = a_2 \cdot (a_2^2 - 3a_2 + 3) < a_2 \cdot K_1 =$

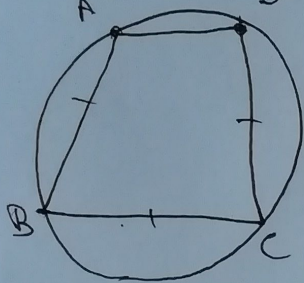
$$= a_1 \cdot K_1^2$$

аналогично по индукции получаем, что $a_i < a_1 \cdot K_1^{i-1}$

т.е. K_1 фикс. число меньше 1, то степени K_1 рано или поздно станут меньше любого наперед заданного числа, в частности $\frac{1}{a_1}$, следовательно найдётся n

$a_n < a_1 \cdot K_1^{n-1} < a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1 < 1 + \frac{1}{2021}$, значит предположение не верно и такое число существует.

№ 3 (лист 1)



Дл.с. $ABCD$ - вписанный и $AB = BC = CD$, то $\angle ABC =$
 $= \angle ABD + \angle DBC = \angle ACD + \angle ACB = \angle BCD$,

$$\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 2 \cdot \angle CAD = 2 \cdot \angle BDA = \angle CDA$$

Следовательно $ABCD$ - равнобокая трапеция

т.к. $ABCD$ - вписанный то $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$.

$$AB = BC = CD ; AC = BD \Rightarrow BC \cdot (AD + BC) = AC^2 \Rightarrow$$

$$AC^2 : BC \text{ по неравенству треугольника } AC < AB + BC = 2BC$$

следовательно если $AC : BC$ то $AC = BC$ тогда окружность
 с центром C и радиусом BC пересекает AB описанную $B \geq 3$ в точках

или совпадает что невозможно, следовательно $AC \neq BC$

$AC^2 : BC$ следовательно BC равно трем возможным ≥ 2 степеням
 следовательно $BC \geq 4$ $AC \geq 6$ тогда $AD = \frac{AC^2}{BC} - BC = 5$
 и $P = 3 \cdot 4 + 5 = 17$ если $BC \neq 4$ то оно ≥ 8 и $P \geq 24 > 17$
 следовательно $AB = BC = CD = 4$, $AD = 5$

(4)

N 01

ВАРИАНТ 11-1

Если бы никакие числа не удались там было бы число равное $2022 + 6 - 1 = 2027$, посмотрим на каком месте оно окажется.

$$45^2 = 2025 < 2027 < 46^2 = 2116$$

Значит существует 45 квадратов меньших 2027.

из них два $1^2 = 1$; $2^2 = 4$ не вычтены. следовательно

$$43 \text{ квадрата } 1728 = 12^3 < 2027 < 2197 = 13^3$$

следовательно 12 кубов без 1 и

$$3^6 = 729 < 2027 < 4^6 = 4096$$

следовательно 3 числа вычтены дважды, без 1-го числа

значит 2027 будет на месте $2022 - 43 - 11 + 2 = 1970$

тогда все другие квадраты и кубы в промежутке нет

на 2022 месте будет. $2027 + 2022 - 1970 = 2079$.

но поскольку выше $2079 < 46^2$, $2079 < 13^3$ следовательно

далее ничего не исключается

Ответ: 2079.

Nº 2 (мкм)

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3} \cdot \cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ\right)}{2 \cdot \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 40^\circ \cdot \cos 60^\circ + \cos 40^\circ \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin(90+10)}{\sin(90-10)} = 1$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2 \cdot (2x+1) - 9 \cdot (2x+1) = (2x-3) \cdot (2x+3) \cdot (2x+1)$$

$\arccos(x-1)$ определён, следовательно $(x-1) \in [-1; 1]$ следовательно $x \in [0; 2]$, $\arccos(x-1) = 0$ следовательно $x-1 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$(2x-3)(2x+1)(2x+3) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x+3 \leq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \\ 2x-3 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -1,5 \\ x \geq -0,5 \\ x \leq 1,5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; -1,5) \cup [-0,5; 1,5];$$

(2)

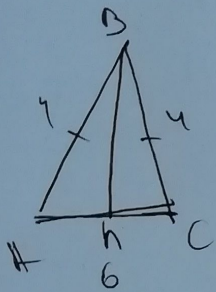
№2 (учеб 2)

$$x \in (((-\infty; -1,5] \cup [-0,5; 1,5]) \cap [0; 2]) \cup \{2\} \Rightarrow$$

$$x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$$

Ответ: $x \in [0; 1,5] \cup \{2\}$

N3 (mcm2)



uzg. de.

$$Bh = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$S = \frac{6\sqrt{7}}{2} = 3\sqrt{7}$$

$$R = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{24}{5\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Omban: $R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$

№ 4 (устн)

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot (a_n^2 - 3a_n + 3)$$

заменим то если $a_n = 1$ то $a_{n+1} = a_n$

аналогично $a_n = 2$ то $a_{n+1} = 2$

т.е. выражение $a_n^2 - 3a_n + 3$ квадратичное с коэффициентом 1 при старшем члене, это значит что на отрезке $(1; 2)$ его значения будут строго меньше одного, причем чем ближе к центру тем меньше, значит, если $a_n \in (1; 2)$ то $a_{n+1} < a_n$

(т.е. a_n увеличивается на что-то меньше одного)
так же заметим, что минимально значение равно

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 3 = \frac{3}{4} > 0, \text{ то есть } a_{n+1} \text{ останется поло-}$$

жительным, пусть нашего n , $|a_n| < \frac{2022}{2021}$ не существует

погда $a_n \in (1; 2)$ каждое следующее $a_n <$ предыдущего

но ближе $1 + \frac{1}{2021}$, следовательно тоже $\in (1; 2)$ тогда

вся последовательность лежит между $1 + \frac{1}{2021}$ и $2 - \frac{1}{2022}$.

(6)

Nº 6 лист.

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \leq 4x^2 + 8x$$

$$|x \cdot (x+1)^2 + a| + |x \cdot (x-1)^2 - a| \leq 4x(x+2)$$

т.е. лев часть ≥ 0 то при $4x(x+2) \leq 0$ формула не имеет, $\Rightarrow x \notin [-2; 0]$

Выпишем выражение для $-x$

$$|-x \cdot (x-1)^2 + a| + |-x \cdot (x+1)^2 - a| \leq -4x(-x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x \cdot (x-1)^2 - a| + |x \cdot (x+1)^2 + a| \leq 4x(x-2)$$

заменим, что если все умножить на промежуток длины 1, не включающий $[-2, 0]$ то

$x_n - x$ не могут одновременно быть корнями уравнения
если сумма модулей $< 4x(x+2)$, то она должна
меньше $\geq 4x \cdot (x-2)$ если оба выражения по модулю > 0 .

$$2x^3 + 2x \leq 4x^2 + 8x$$

$$x(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$x((x-1)^2 - 2^2) < 0$$

$$x(x-3)(x+1) < 0$$

(9)

ЧЕРНОВИК

11

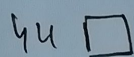
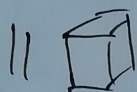
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

2^3 3^2 3^3 4^2 4^3 5^2

8 9 16^{25} 27 ...

23 45 6 7 89 10 11 12

12 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5



23

~~47~~ 55

$\times 15$
 $\times 15$
 $\times 225$
 $\times 15$
 1225
 225
 3475

2^3 3^3 4 ... 12^3

2 - 45

2082 - 3

2079

$2022 + 5 = 2027$

$\times 36$
 $\times 6$
 216
 $\times 8$
 $\times 9$
 729

$\times 144$
 $\times 14$
 121
 $\times 32$
 $\times 196$
 $\times 14$
 169
 784
 196
 2744

2027
40
 $\times 30$
 $\times 45$
 $\times 45$
 225
 180
 2025
 $\times 46$
 $\times 46$
 278
 184
 2016

12

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

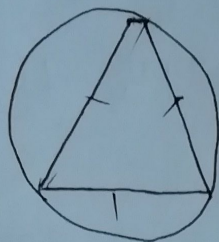
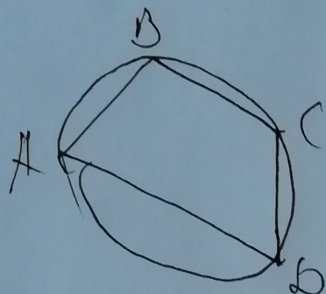
$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

1

№3

ЧЕРНОВИК!

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



lim.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a^3}{\sqrt{3}a^2}$$

$$= a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

№4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

пер.

пер.

$$a_1 < 2$$

$$|a_n| > 1$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$8 - 3 \cdot 4 + 6$$

$$-12 + 14 = 2$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n > -3a_n^2 + 3a_n \quad 4043 - 1 \quad 2 - \frac{1}{2022}$$

$$\begin{array}{r} 1,9 \\ \times 1,9 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \\ \times 1,9 \\ \hline 3249 \\ 361 \\ \hline 6,859 \end{array}$$

$$3 \cdot \begin{array}{c} 16 \\ \text{scribbles} \end{array}$$

$$10$$

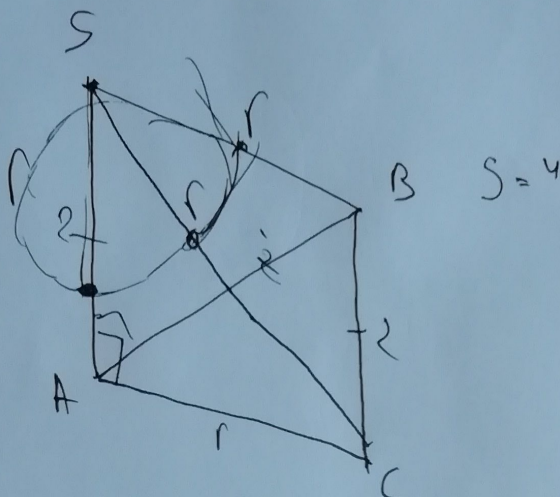
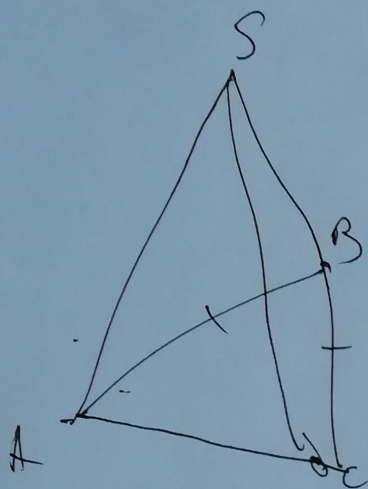
$$\begin{array}{r} 4043 \mid 2022 \\ 2022 \cdot 10 \mid 1,9 \dots \\ 20210 \\ \hline 18198 \\ \hline 20120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2022 \\ 9 \\ \hline 18198 \end{array}$$

(2)

Черновик!

№5



№6

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

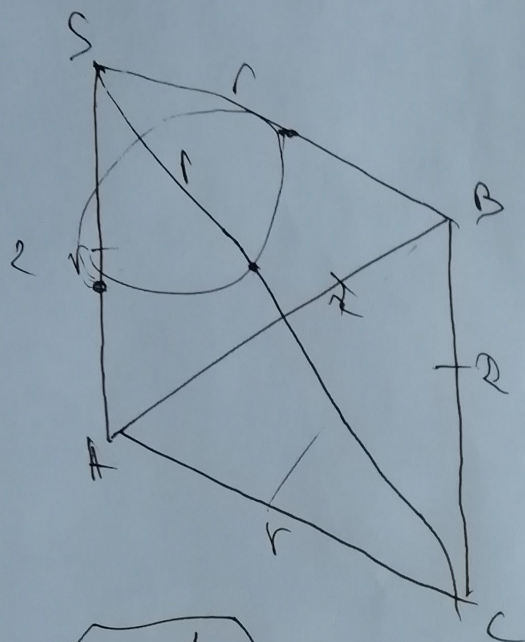
$$x^3 + 2x^2 + x + a > x$$

$$\text{или } a > -x^3 - 2x^2 - x$$

Черновик

№ 5

~~Вопрос~~ 89



$$S = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot S_{ABC}$$

$$S_{ABC} =$$

$$\sqrt{4 - \frac{1}{4} r^2} = h$$

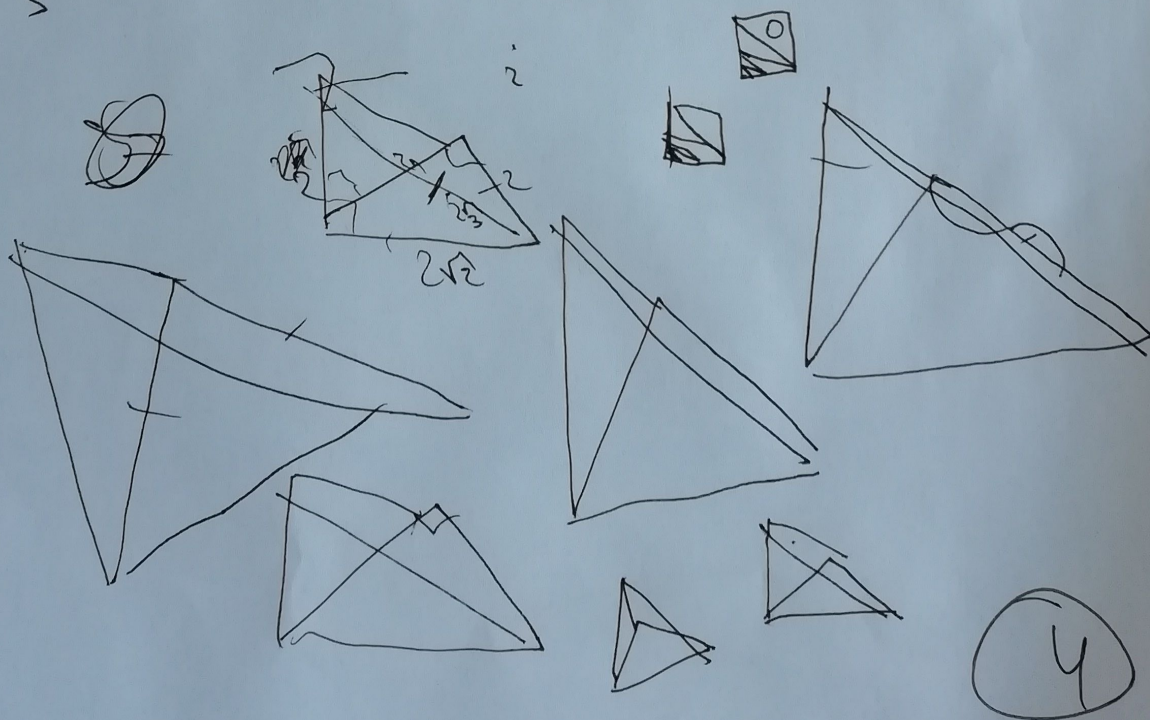
$$\frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{4} r^2} \cdot r \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = V$$

$$\frac{r \sqrt{4 - \frac{1}{4} r^2}}{3} = V$$

$$\frac{r \sqrt{4 - \frac{1}{4} r^2}}{3} = S_{\text{сечение}}$$

$$8 + 4 =$$

$$12 \quad 2\sqrt{3}$$



4

4 ЕРНОВАК

$$8 - \left(\frac{1}{2022^3} - 3 \left(4 - \frac{1}{2022^2} \right) + 3 \left(4 - \frac{1}{2022} \right) \right)$$

$$8 - \frac{1}{2022^3} - \cancel{12} + \frac{3}{2022^2} + \cancel{12} - \frac{1}{2022}$$

$$8 - \frac{1 + 3 \cdot 2022 - 2022^2}{2022^3}$$

$$\frac{2022}{2021} = \frac{2024 + 1}{2021} -$$