МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Дьяконов Сергей Андреевич**
Класс: **7-8**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Дьяконов Сергей Андреевич

Класс: 7-8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

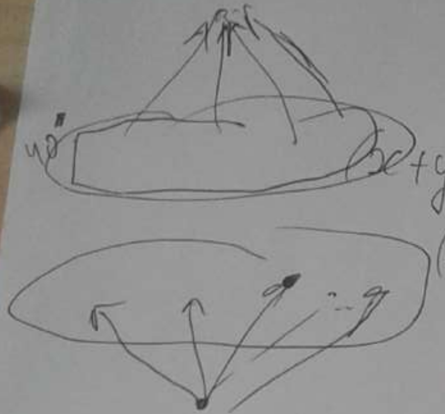
$9b - 9c$

Черновик

$9 \cdot 4 = 36$

$9(b-c) \vdots 72$

$(b-c) \vdots 8$



$(x+y)^2 + x+y+2y = 100$

$(x+y)^2 = 100 - 3y - x$

$y = 5,\ x = 4$

$x \quad 7 + x$ человек, сигидыли

$90 + 10 = 100$

$10,5y + xy = z$

$y.$

$3,5y = z - 10.$

15

$3,5y = 4$

14 $\quad y =$

$y = \frac{4}{3,5}$

$y = \frac{8}{7}$

$7 + x + 3,5$

$(7+x) \cdot \frac{8}{7} = 10.$

$8 + \frac{8}{7}x = 10$

$\frac{4}{7}x = 1.$

Сформулировать 1 из 6

Задача 2. Чистовик

Заметим, что 7 рабочих, которые работали половину дня это тоже самое, что и 3,5 рабочих, которые работали целый день. Пусть рабочих было $7+x$, тогда очевидно, что $7+x \geq 3{,}5 \cdot 2$, то есть в второй день грядок вскопано было хотя бы в 2 раза меньше, чем в первый. ~~Следовательно~~ Так как всего грядок целое число и в первый день было вспахано целое число, то в второй тоже целое, то есть в второй было вскопано либо 5, либо 4 ... либо 1 ($6 \cdot 2 > 10$, не подходит).

Пример на 5: в первый день было 7 человек. В второй ровно в два раза меньше, следовательно было 5 вспахано. На 4 не подходит, так как если 3,5 человека сделали 4 грядки за день, то в первый день трудились $3{,}5 \cdot \frac{10}{4} = \frac{35}{4}$ - нецелое число работников, противоречие. 3 не подходит, аналогично: $3{,}5 \cdot \frac{10}{3} = \frac{35}{3}$ - нецелое. 2 не подходит, аналогично $3{,}5 \cdot \frac{10}{2} = \frac{35}{2}$ - нецелое. На 1 подходит, пусть в первый трудились 35 человек.

Ответ: 11, 15.

Задача 3. (Чистовик

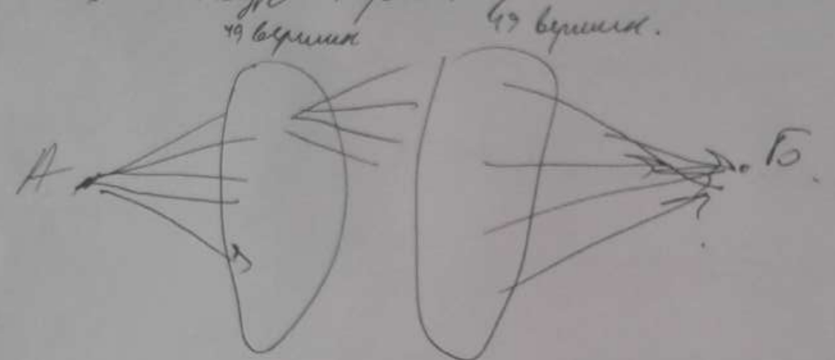
Заметим, что $\overline{abc} - \overline{acb} = 9b - 9c = 9\cdot(b-c)$.

Заметим, что $9\cdot(b-c)$ делится на $72\ (9\cdot 8)$ только если $b-c \vdots 8$. Сколько пар b, c, что $b-c \vdots 8$? ~~Таких~~ Их ~~[illegible]~~ 14, потому что если $b>c$, то если $c=0$, то $b=8$, если $c=1, b=9$, а если $c\geq 2$, то $b\geq 10$ (противоречит), а если $b<c$ то все аналогично (надо просто ~~решать~~ сделать $c-b$). а если $b=c$, то таких ~~9~~ 10 вариантов. Итого ~~9~~ $10+2+2=$ ~~[illegible]~~ 14 вариантов. В ~~[illegible]~~ ~~б~~ цифру. а можно сделать 9-ю способами ($a=0$ не подходит). Значит всего ~~[illegible]~~ таких трехзначных $9\cdot 14 = 126$.

Ответ: 126.

Задача 6. (Чистовик.

Сразу заметим, что за один прыжок можно, если просто провести ребро из города А в Б. Город А – Галатия-37, город Б – Пандора. За два тоже можно, то просто не проводить из А в Б ребро. За из три можно, если сделать такую картинку



Между 49 и 49 надо просто проставить ребра, очевидно что это возможно. На 4 и более не получается, так как данный рисунок расклеится и в каком то множестве будет <40 вершин.

Задача 5.

3+2+3+2+3+2 = 9+6 = 15 кубиков. Меньше нельзя, потому что очевидно, что нужно хотя бы 13 кубиков (по первому рисунку), но еще 2 это крайние с вида сбоку.

Ответ: 15.

Задача 4. Чистовик

4. Заметим, что $(x+y)(x+y+1)+2y=100 \Leftrightarrow$

$(x+y)^2+x+y+2y=100 \Leftrightarrow (x+y)^2=100-2y-(x+y)$.

Теперь заметим, что если $(x+y)\le 8$, то $(x+y)^2\le 64$, а $100-2y-(x+y)\ge 100-2\cdot 8-8=100-24\ge$ ≥ 76, противоречие, то $x+y\ge 9$. Но тогда если $x+y\ge 10$, то очевидно что $100-2y-(x+y)<100$, потому что x, y натуральные. Значит $x+y=9$. То есть $(x+y)^2=100-2y-(x+y) \Leftrightarrow 9^2=100-2y-9 \Leftrightarrow$ $\Rightarrow 81=91-2y \to 2y=10 \to y=5 \to x=4$.

Я доказал, что это единственная пара.

Ответ: $x=4$, $y=5$.

Задача 1. Чистовик.

Сначала разберем случай, когда шесть или меньше человек. Тогда все должны быть рыцарями согласно первому утверждению. Но согласно второму утверждению они все ~~лжецы~~ лжецы, противоречие. Значит их хотя бы семеро. Тогда заметим, что первые шесть человек по наибольшести бананов всегда рыцари (больше них всегда имеют 5 или меньше человек). Остальные лжецы. Давайте посмотрим на рыцаря с наибольшим кол-во кокосов, тогда больше него имеют хотя бы 7 человек, но на самом деле ровно 7, потому что ~~есть~~ если больше 7, то тот, ~~[illegible]~~ кто ~~[illegible]~~ среди хотя бы 8 человек имеет наименьшее кол-во кокосов он должен быть рыцарем согласно второму утверждению, противоречие, то есть 6 рыцарей и 7 лжецов.

Ответ: да может, 6 рыцарей и 7 лжецов.