



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шамшура Егор Сергеевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шамшура Егор Сергеевич

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	10 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

6 7 8 10 11 12 13 14 15 17 18 19 20 21

Упробор 1

Всего кубов

$$t - 6 + 1 = 2022$$

Первые 2022 числа:

$$t - 5 = 2022$$

$$t = 2027$$

~~кубов в первом 2027 числе~~

1 2 3 4 5 ... 2027:

$$\sqrt{2027} \approx 45$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \times 45 \\ \hline 90 \\ 225 \\ \hline 180 \\ 2025 \end{array}$$

45 кубов; 12 кубов

3 перес.

$$\begin{array}{r} 2027 \\ - 45 \\ \hline 1982 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1982 \\ - 12 \\ \hline 1970 \end{array}$$

$$\Rightarrow 45 + 12 - 3 =$$

$$= 45 + 9 = 54$$

$$\begin{array}{r} 2027 \\ - 54 \\ \hline 1973 \end{array}$$

12 кубов

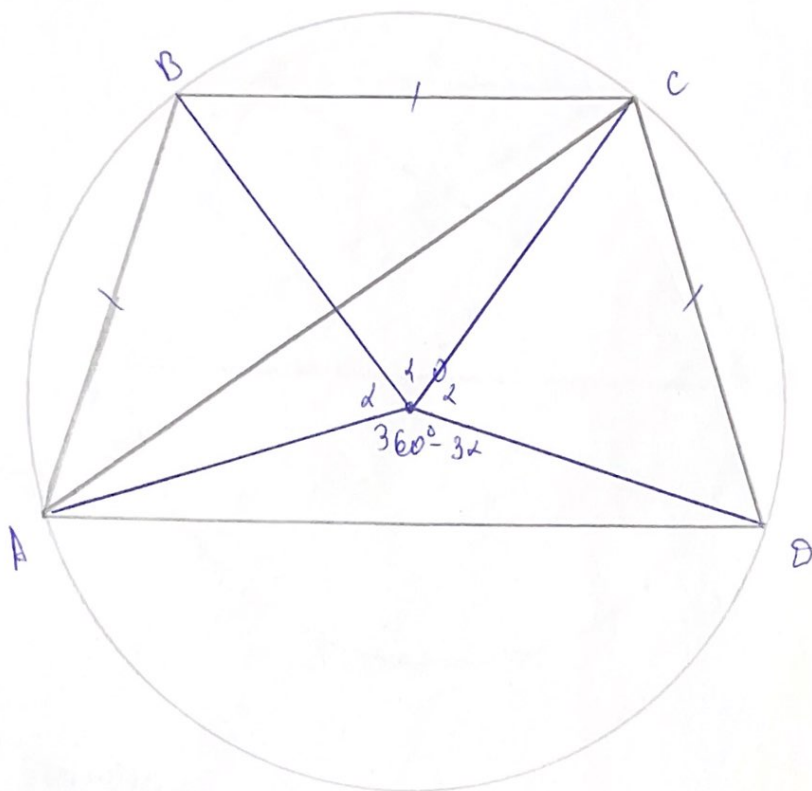
$$\begin{array}{r} 20 \\ 25 \\ \times 22 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 218 \\ \times 6 \\ \hline 1308 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \\ \times 7 \\ \hline 2401 \end{array}$$

№3

Черновик?



Решение:

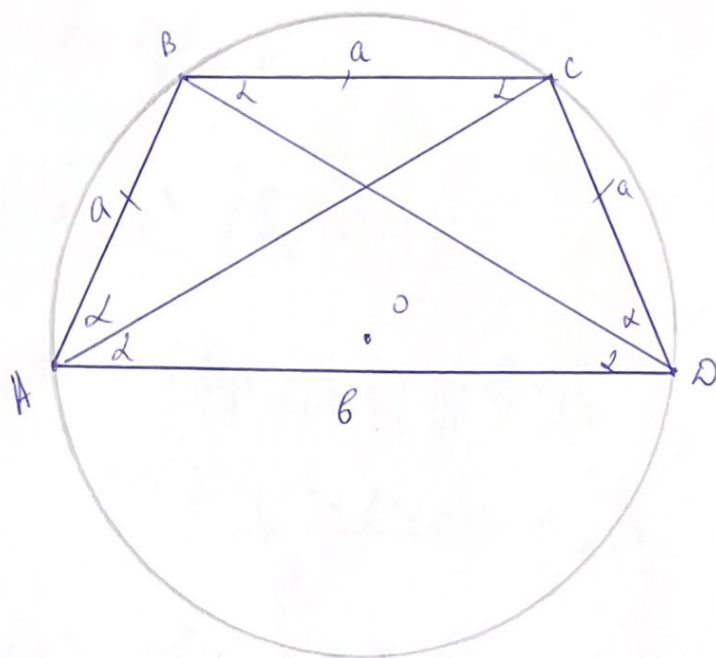
- 1) Пусть $AO = R$; $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \alpha$ (отмечаются на равные хорды). $\Rightarrow \angle AOD = 360^\circ - 3\alpha$. $\Rightarrow$
 т.к. $\angle AB = BC = CD \Rightarrow$ углы равны $\Rightarrow$ это вписанная треугольница $\Rightarrow AC = BD$.
- 2) по Т. косинусов:

$$\begin{cases} AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha \\ AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 3\alpha \\ AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha \end{cases} \quad \begin{aligned} &AB, AD, AC \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\ &\Rightarrow AB^2, AD^2, AC^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2 - 2.

№3

Упробор 3



Решение:

1) Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow$ т.к. $AB = BC = CD$, то

$\angle BAC = \angle CAD = \angle ADB = \angle BDC = \angle BDA = \angle BCA = \angle DBC = \alpha$.

2) Пусть $AB = BC = CD = a$

Черновик 4

$$\frac{b-a}{2} + a + \frac{b-a}{2} = b$$

$$\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$CH_2^2 = a^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$AC^2 = \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^2 + 2ab + a^2 - b^2 + 2ab - a^2}{4} + c^2$$

$$AC^2 = ab + a^2 = a(a+b)$$

$$AC = \sqrt{a(a+b)} \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=3 \Rightarrow AC = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$$

$$b=3; AC=2$$

14

Черновик

Рассмотрим такое n , чтобы

$$\begin{cases} a_n \leq \frac{2022}{2021} \\ a_{n-1} \geq \frac{2022}{2021} \end{cases} \Rightarrow a_n = a_{n-1}(a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 3) \leq \frac{2022}{2021} \Rightarrow$$

$$\frac{2022}{2021} (a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 3) \leq a_{n-1} (a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 3) \leq \frac{2022}{2021} \Rightarrow$$

$$a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 3 \leq 1$$

$$a_{n-1}^2 - 3a_{n-1} + 2 \leq 0$$

$$a_{n-1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow a_{n-1} \in [1; 2], \text{ т. к.}$$

т. к. $a_n \leq a_{n-1} \leq \dots$

$$a_n \leq \frac{2022}{2021} \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1 = \frac{4043}{2022} < 2, \text{ по}$$

все условия удовлетворены $\Rightarrow$ можно
найти такое n .

Ответ: найдется.

$$\alpha = 60^\circ \Rightarrow$$

Чепровин 6

$$t = a$$

$$4 \cos^2 \alpha - 1 > 0$$

$$4 \cos^2 \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 \alpha \in \left\{ \frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; 1 \right\}$$

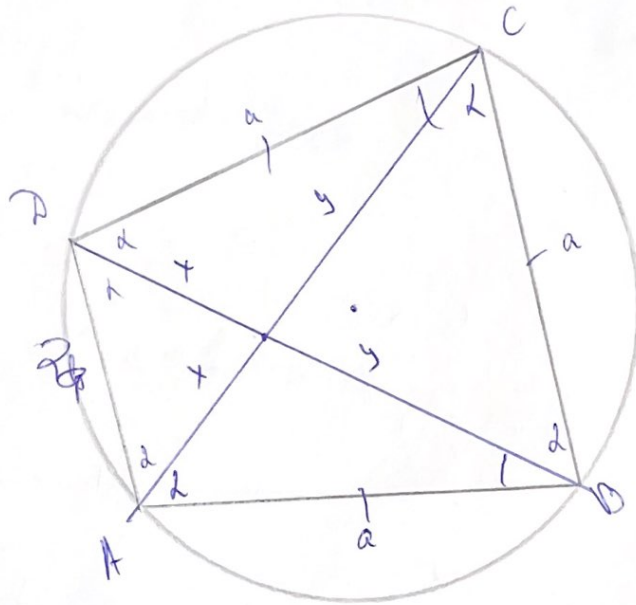
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \quad \times$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha = 30^\circ$$

$$t = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Серновит 7



$$3a + b \rightarrow \min$$

$$a, b, x+y \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$$

$$x = \frac{by}{a}$$

$$x = b +$$

$$x+y = \frac{by+ay}{a}$$

$$x+y = \frac{y(b+a)}{a} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} b \equiv 0 \\ y \equiv 0 \end{cases}$$

$$b=at$$

$$\frac{(a+b) \cdot y}{a} \in \mathbb{Z}$$

$$y(1 + \frac{b}{a}) \in \mathbb{Z} = y + \frac{by}{a} \in \mathbb{Z}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Черновик 8

$$f^2 = 2ac \cos \alpha$$

$$f = 2a \cos \alpha$$

$$a \in \mathbb{Z}; f \in \mathbb{Z}; \underline{2a \cos \alpha \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \cos \alpha = 1$$

$$\alpha = 0;$$

$$\cancel{a = m} \cos$$

$$3a + b \rightarrow \min$$

$$a^2 = b^2 + 4a^2 \cos^2 \alpha - 2b \cdot 2a \cos \alpha \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + 4a^2 \cos^2 \alpha - 4ab \cos^2 \alpha$$

$$a^2 - b^2 = 4a \cos^2 \alpha (a - b)$$

$$a = b$$

$$a + b = 4a \cos^2 \alpha$$

$$b = a (4 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$4 \cos^2 \alpha \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 \alpha = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3};$$

N2

Uebung 8

$$(8x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\sin 40^\circ}\right)\right)$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ \sqrt{3}}{\sin 40^\circ \cos 40^\circ} \right) = \frac{\frac{1}{2} \sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ} = \cos 60^\circ \sin 40^\circ + \sin 60^\circ \cos 40^\circ$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin(180^\circ - 80^\circ)} = 1$$

$$\arccos(1) = 0$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

$$-1 \leq x-1 \leq 1$$

$$\arccos(x-1) = 0$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x-1=1 \quad (x=2)$$

$$8x^3 + 4x^2 - 12x - 9 = 0$$

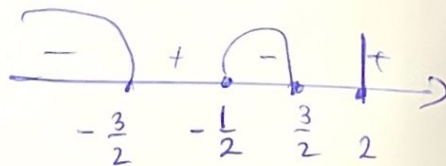
$$x = 2$$

$$4x^2(2x+1) - 9(x+1) = 0$$

$$0 \leq \arccos(x-1) \leq \pi \Rightarrow$$

$$(2x+1)(4x^2-9) = 0$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 4x^2 - 12x - 9 \leq 0$$



$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) \leq 0$$

$$\text{Antwort: } x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup [2, \infty)$$

N6

Задача
10

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| < 4x^2 + 8x$$

$$x(x+1)^2 \geq -a$$

$$x(x-1)^2 \geq a$$

$$1) \quad x(x-1)^2 \geq a; \Rightarrow x(x+1)^2 \geq a$$

$$2) \quad x(x-1)^2 \leq a \Rightarrow$$

при $x = t$

$$|t^3 + 2t^2 + t + a| + |t^3 - 2t^2 + t - a| < 4t^2 + 8t$$

при $x = -t$

$$|-t^3 + 2t^2 - t + a| + |-t^3 - 2t^2 - t - a| < 4t^2 - 8t$$

⁻⁴ ⁻³ ⁻² ⁻¹ ⁰ ¹ ² ³
 1 2 3 4 5 6 7 10 ...

Черновик 11

$$1 - -4 = 5$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

2027 pos-?

$$t - 45 - 12 + 3 = 2027$$

$$t = 2024 + 45 + 12 = 2024 + 57 = 2081 - 2 = 2079$$

№1

Вариант 11-1

Рассмотрим последовательность без удаления кубов и квадратов:

6, 7, ..., n

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2022 \text{ место} \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} n - 6 + 1 = 2022 \\ n = 2027. \end{array} \quad \Rightarrow$$

Вс с 6 до 2027 посчитаем количество кубов, квадратов и их пересечение:

$$\begin{array}{l} 1) \quad 3^2 = 9 \\ \quad 4^2 = 16 \\ \quad \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow 45 - 3 + 1 = 43 \text{ квадрата до } 2027.$$

$$45^2 = 2025$$

$$46^2 = 2116$$

$$\begin{array}{l} 2) \quad 2^3 = 8 \\ \quad 3^3 = 27 \\ \quad \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow 12 - 2 + 1 = 11 \text{ кубов и их пересечение}$$

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197$$

$$\begin{array}{l} \text{в 6 степени: } 2^6 = 4^3 = 8^2 = 64 \\ 3^6 = 9^3 = 27^2 = 729 \end{array} \Rightarrow \text{лишние: } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 2027 + 43 + 11 - 2 = 2070 + 9 = 2079$$

Ответ: 2079

N2

Умножение comp. 2

$$(8x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}\right)\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ \sqrt{3}}{\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ} \right) = \frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$$

$$= \frac{\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 40^\circ)}{\sin 80^\circ} = 1$$

DD3: $-1 \leq x-1 \leq 1$, из-за $\arccos(x-1)$

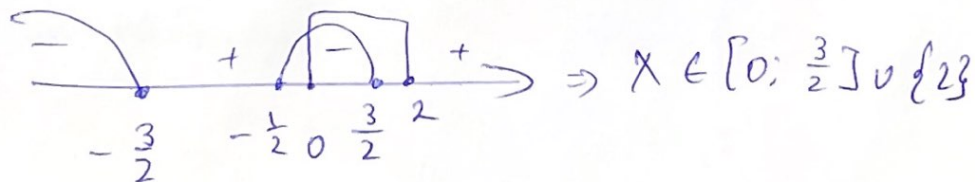
$0 \leq x \leq 2$; $0 \leq \arccos(x) \leq \pi \rightarrow \text{берге } \geq 0$

$$\arccos(x-1) (8x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \leq 0$$

$$\begin{cases} \arccos(x-1) = 0 & x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ (8x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \leq 0 \end{cases}$$

$$4x^2(2x+1) - 9(2x+1) \leq 0$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) \leq 0$$



Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

N4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}; \quad a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n \Rightarrow \text{преобразуем}$$

$$\text{левую часть: } a_{n+1} - 1 = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 = (a_n - 1)^3 \Rightarrow$$

$$\text{Пусть } b_n = a_n - 1 \Rightarrow b_{n+1} = b_n^3.$$

$$b_1 = a_1 - 1 = \frac{4043}{2022} - 1 = \frac{2021}{2022} < 1.$$

Т.к. $b_{n+1} = b_n^3$, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется:

$$0 < b_{n+1} = b_n^3 < b_n < 1. \Rightarrow \text{последовательности}$$

бесконечно убывающие, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \Rightarrow b_n > 0.$

То есть найдется такое $\varepsilon = \frac{1}{2021} > b_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow b_n < \varepsilon = \frac{1}{2021} \Rightarrow a_n = b_n + 1 < 1 + \frac{1}{2021} = \frac{2022}{2021} \Rightarrow$$

т.т.д.

Ответ: найдется.

№6

Чистовик
стр. 4

Пусть $y = |x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$.

Рассмотрим всевозможные раскрытия модулей и заметим, что значения y всегда равны: $2|2x^2 + a|$ или $2|x^3 + x|$.

Теперь приравняем к правой части:

$$2|2x^2 + a| = 4x^2 + 8x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq 2x^2 \\ a = 4x \end{cases} \quad \begin{cases} a < -2x^2 \\ a = -4x^2 - 4x \end{cases}$$

$$2|x^3 + x| = 4x^2 + 8x$$

$$|x^3 + x| = 2x^2 + 4x$$

$$x=0 \Rightarrow |x^2 + 1| = 2x + 4$$

$$x=3, \text{ больше корней нет.}$$

Теперь рассмотрим каждый корень

Ур-е по очереди:

1) $x=0 \Rightarrow y = 2|a| < 0$, но $2|a| \geq 0 \Rightarrow \emptyset$

2) $x=3 \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 + 18 + 3 + a \geq 0 \\ 27 - 18 + 3 - a \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -48 \\ a \leq 12 \end{cases} \Rightarrow a \in [-48; 12]$$

Числовик стр. 5

$$3) \quad x = \frac{a}{4} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a^3}{4^3} + 2\frac{a^2}{4^2} + \frac{a}{4} + a \geq 0 \\ \frac{a^3}{4^3} - 2\frac{a^2}{4^2} + \frac{a}{4} - a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + 8a^2 + 16a + 64 \geq 0 \\ a^3 - 8a^2 + 16a - 64 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in [0; 12]$$

$$4) \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow a \leq 0.$$

Введем $f(x_1; x_2)$, которая находит расстояние между корнями: $f(x_1; x_2) = |x_2 - x_1| \Rightarrow$

$$1) \quad f(3; \frac{a}{4}) = |\frac{a}{4} - 3| = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ a = 16 \end{cases}$$

при $a = 8$ оба корня существуют ($a \in [-93; 12]$)

при $a = 16$ не существуют корни: $16 > 12$.

$$2) \quad f(\frac{a}{4}, \frac{-1 - \sqrt{1-a}}{2}) = 1 \quad \left| \frac{a}{4} + \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2} \right| = 1 \Rightarrow \text{нет решений.}$$

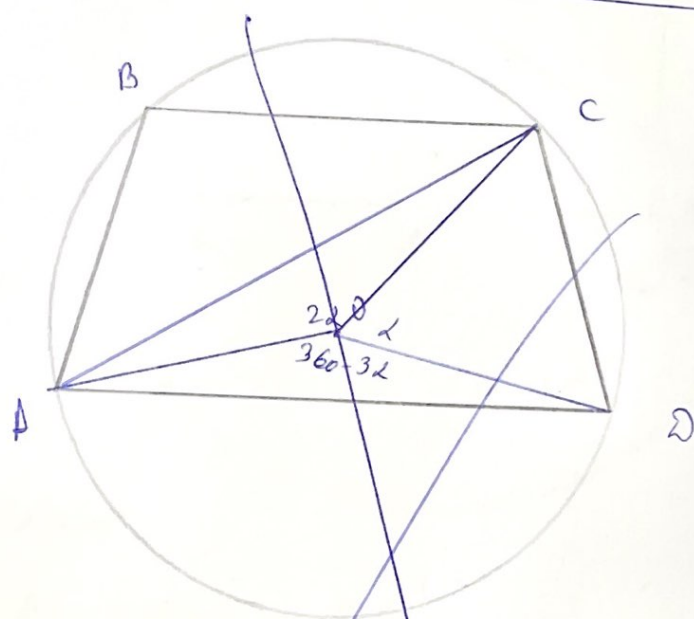
Чистовик стр. 6

3) $f(3; \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2}) = 1 \Rightarrow$ т.к. 1 корень < 0 , другой $= 3$,

но $f(3; \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2}) \geq 3 \Rightarrow \emptyset$

Ответ: $a=8$

№3



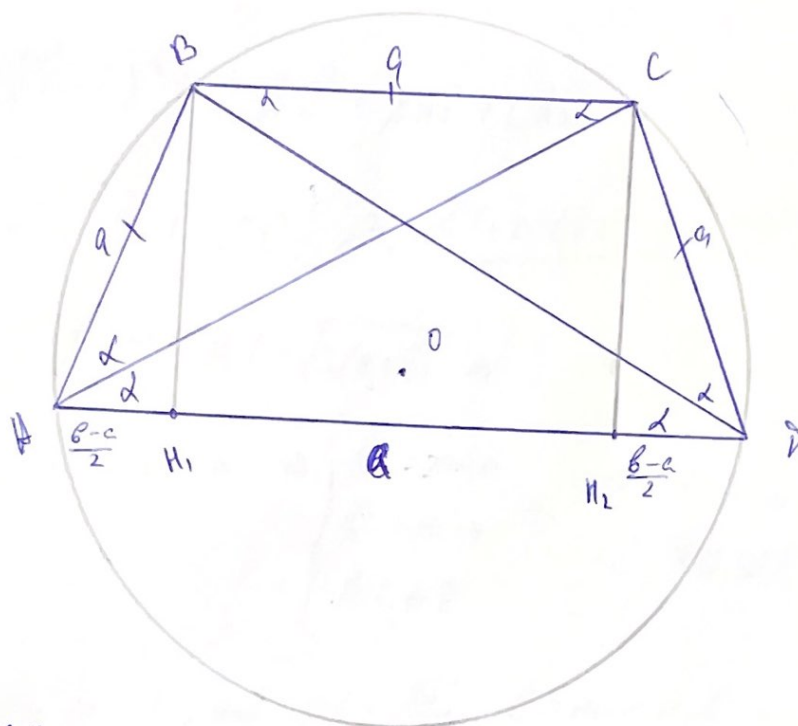
Решение:

1) $AB = BC = CD \Rightarrow \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \alpha$ (опираются на равные хорды) $\Rightarrow \angle AOD = 360^\circ - 3\alpha$.

2) Пусть радиус окр. $R \Rightarrow$ воспользуемся т. косинусов для треугольников AB , AD и AC . $\Rightarrow$

$$\begin{cases} AB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha \\ AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha \\ AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 3\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

13



Решение:

- 1) $AB = BC = CD = a \Rightarrow$ Пусть $\angle BAC = \alpha \Rightarrow$
 Т.к. стороны равны $\Rightarrow$ хорды равны $\Rightarrow$ углы
 опирающиеся на них тоже равны $\Rightarrow$
 $\angle BAC = \angle CAD = \angle ADB = \angle BDC = \angle BCA = \angle CBD = \alpha$.
- 2) $\Rightarrow$ ABCD - трапеция вписанная $\Rightarrow$ диагонали равны $\Rightarrow$
 Пусть $AC = t$. $\Rightarrow a, b$ и $t \in \mathbb{R}$ по условию. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ Опустим высоты из точек B и C на AD,
 $BH_1 = CH_2$. Т.к. это трапеция, то

Чистовик стр. 8

$$H_2 D = \frac{b-a}{2}; \quad H_1 H_2 = a; \quad AH_1 = \frac{b-a}{2} \Rightarrow$$

$$\therefore \text{По т. Пифагора: } CH_2^2 = CD^2 - H_2 D^2 =$$

$$= a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2; \quad AC^2 = AH_2^2 + CH_2^2 =$$

$$= \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2 + 2ab + a^2 - b^2 + 2ab - a^2}{4} =$$

$$= a^2 + ab \Rightarrow AC = \sqrt{a(a+b)} \Rightarrow$$

$$P = 3a + b \rightarrow \min \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow \min \\ b \rightarrow \min \\ AC \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq \frac{b-a}{2} \\ 3a \geq b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1, \text{ но } AC = \sqrt{b+1} \quad b \rightarrow \min \Rightarrow b = 3. \quad \times$$

$$a = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2(b+2)} \quad b \rightarrow \min \Rightarrow b = 6 \quad \times \Rightarrow$$

$$a = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3(b+3)} \quad b \rightarrow \min \Rightarrow b = 5 \quad \times$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{4(a+b)}; \quad a = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{4(b+4)} \Rightarrow b = 5$$

$$AC = \sqrt{4 \cdot 5} = 2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 3 \cdot a + b = 3 \cdot 4 + 5 = 17; \text{ теперь площадь:}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Условие стр. 60

3) Найти радиус окружности около $\triangle BEM$. $\Rightarrow$

$$R = \frac{BM \cdot BE \cdot EM}{\sqrt{p(p-BM)(p-BE)(p-EM)}} = \frac{4\sqrt{1-\frac{\sqrt{6}}{3}} \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot EM}{\sqrt{p(p-BM)(p-BE)(p-EM)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EM = \sqrt{16 - \frac{3\sqrt{6} + 16\sqrt{3}}{3}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{4\sqrt{1-\frac{\sqrt{6}}{3}} \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{16 - \frac{3\sqrt{6} + 16\sqrt{3}}{3}}}{\sqrt{p(p-BM)(p-BE)(p-EM)}} \Rightarrow$$

4) т.к. $\triangle BEM$ - равнобедрен, то все еще проще.

6) центр окружности $\Rightarrow$ нот. $SO = \sqrt{SE^2 - R^2}$ $\Rightarrow$
 $SO = \sqrt{SE^2 - R^2}$; $SO = \sqrt{8 - R^2}$

$$\Rightarrow V_{BEM} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{BEM} = \frac{1}{3} \sqrt{8 - R^2} \cdot S_{BEM}$$

$$V_{\text{сферы}} = \pi (R - SO)^2 \cdot \frac{3R - (2\sqrt{2} - SO)}{3}$$

$$\Rightarrow \pi \cdot (2\sqrt{2} - SO)^2 \cdot \frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + SO}{3} \Rightarrow \pi (2\sqrt{2} - SO)^2 \cdot \frac{4\sqrt{2} + SO}{3} = \pi (2\sqrt{2} - SO)^2 \cdot \frac{4\sqrt{2} + SO}{3}$$

Условие смп. 11

$$V_{\text{сферы}} = \pi (R - s_0)^2 \cdot \frac{3R - 2\sqrt{2} + s_0}{3} =$$

$$= \pi (2\sqrt{2} - s_0)^2 \cdot \frac{3R - 2\sqrt{2} + s_0}{3} =$$

$$= \pi (2\sqrt{2} - s_0)^2 \cdot \frac{4\sqrt{2} + s_0}{3} =$$

$$= \pi (2\sqrt{2} - \sqrt{8-r^2}) \cdot \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{8-r^2}}{3}.$$

$$r = \frac{4\sqrt{1-\frac{\sqrt{6}}{3}} \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{16 - \frac{3(6+16\sqrt{3})}{3}}}{3}$$

$$\sqrt{p(p-\beta m)(p-\beta \bar{z})(p-zm)}$$

Ответ: $V = \pi (2\sqrt{2} - \sqrt{8-r^2}) \cdot \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{8-r^2}}{3}$