



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Волович Василий Владимирович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Волович Василий Владимирович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	5 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Чистовик

Вариант 11-1.

№1. $2^3=8, 3^3=27, \dots, 12^3=1728, 13^3=2197$
 $3^2=9, 4^2=16, \dots, 45^2=2025, 46^2=2116$

1

6, 7, 8, 9, 10, ..., 2027, ...
 1 2 3 4 5 2022

Из чисел с номерами от 1 до 2022 в изнач. послед. мы удалили числа $2^3, 3^3, \dots, 12^3$; $3^2, 4^2, \dots, 45^2$. В этих двух группах есть одинак.

числа. $x^2=y^2 \Rightarrow x^3=y^3=k^6$ (т.к. все простые мн. входят в степ. $\div 2$ и $\div 3$).
 $2^6=64, 3^6=729, 4^6=4096$. Поэтому в этих двух группах есть два одинак. числа: 64 и 729. Значит, из чисел с номерами от 1 до 2022 мы удалили 11+43-2=52 числа. После удал. этих чисел номер 2022 будет иметь число $2027+52=2079$. При этом среди чисел от 2027 до 2079 нет точных кв. или точных кубов, т.к. $12^3=1728 < 2027 < 2079 < 13^3=2197$, $45^2=2025 < 2027 < 2079 < 46^2=2116$.

Поэтому после удал. всех точных кв. и точных кубов номер 2022 будет иметь число 2079.

Ответ: 2079

№2.

Заметим, что $\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$
 $= \frac{\sin(40^\circ + 60^\circ)}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{2\sin 50^\circ \cos 50^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ} = 1.$

Поэтому правая часть равна $\arccos(1) = 0$, кр-во принимает вид:
 $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$
 $\arccos(x-1) \in [0; \pi]$. Если $\arccos(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-1=1; x=2$, то кр-во выполняется. Значит, $x=2$ подходит. Пусть теперь $x \neq 2$.

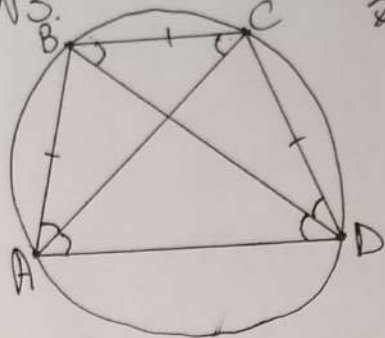
$x-1 \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [0; 2]$
 Тогда $\arccos(x-1) > 0$ и кр-во с учётом ОДЗ: $x \in [0; 2]$ принимает вид:
 $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \leq 0; (2x-3)(4x^2+8x+3) \leq 0$
 $(2x-3)(2x+3)(2x+1) \leq 0; (x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}) \leq 0.$

$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}].$ С учётом ОДЗ получаем: $x \in [0; \frac{3}{2}].$

Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}.$

Условие

13.



~~Пусть $AB=BC=CD=x$~~

$\angle CAD = \angle ACB$ т.к. они опираются на равные хорды AB и $CD \Rightarrow AD \parallel BC$, т.к. $ABCD$ - равноб. трап. $\Rightarrow AC = BD$. Пусть $AC = BD = x$.

Пусть, что $AB = BC = CD = 1$. По теор. Птолемея:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD; \quad x^2 = 1 + AD \Rightarrow AD = x^2 - 1.$$

$$AB + BC > AC = x; \quad 2 > x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AD = 0$$

$$x^2 = 4 + 2AD; \quad AD = \frac{x^2 - 4}{2} > 0 \Rightarrow x > 2.$$

$$x^2 = 9 + 3AD \Rightarrow AD = \frac{x^2 - 9}{3} \Rightarrow x > 3; \quad 6 > x$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ или } x = 5, \text{ но тогда } \frac{x^2 - 4}{3} \notin \mathbb{Z} - \text{противоречие. Пусть } AB = BC = CD = 4.$$

$$\text{Тогда } x^2 = 16 + 4AD \Rightarrow AD = \frac{x^2 - 16}{4}; \text{ Заметим, что } x = 6 - \text{подходит.}$$

$$AD = \frac{36 - 16}{4} = \frac{20}{4} = 5. \text{ При этом } 8 > x = 6 \text{ В данном случае}$$

$$\text{периметр равен } 4 + 4 + 4 + 5 = 17. \text{ Если } AB = BC = CD \geq 6, \text{ то периметр}$$

$$> 18. \text{ Поэтому остаётся рассм. случаи } AB = BC = CD = 5.$$

$$x^2 = 25 + 5AD \Rightarrow AD = \frac{x^2 - 25}{5} \Rightarrow x = 5; \quad 10 > x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow AD = 0 - \text{приним.}$$

$$\text{Поэтому миним. периметр равен 17 и достиж. при } AB = BC = CD = 4,$$

$$AC = BD = 6, \quad AD = 5. \text{ Найдём радиус опис. окр-ти } R.$$

$$\text{В треуг. } ABC \text{ пров. высоту } BH. \text{ Тогда } AH = HC = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{По теор. Пифагора } BH = \sqrt{6^2 - 9^2} = \sqrt{27}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{27} = 3\sqrt{27}.$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4R} = \frac{24}{R}; \quad 3\sqrt{27} = \frac{24}{R}; \quad R = \frac{8}{\sqrt{27}}$$

$$\text{Ответ: } R_{\min} = \frac{8}{\sqrt{27}} - \text{радиус опис. окр-ти.}$$

14. Ответ: найдётся.

Предположим обратное. Заметим, что $a_{n+1} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3) =$

$$= a_n \left(a_n - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{3}{4} a_n. \text{ Так как } a_1 > 0, \text{ то из этой формулы следует,}$$

$$\text{что } a_2 > 0 \Rightarrow a_3 > 0 \text{ и т.д. Значит, все } a_i > 0. \text{ Тогда из предп. противно}$$

$$\text{следует } a_i > \frac{2021}{2021} \quad (\forall i).$$

Числовик 54 (последнее) ③

$a_{n+1} = a_n + (a_n^3 - 3a_n^2 + 2a_n) = a_n + a_n(a_n^2 - 3a_n + 2) = a_n + a_n(a_n - 1)(a_n - 2) =$
 $= a_n - a_n(a_n - 1)(2 - a_n)$. ~~Известно~~ Мы знаем, что $a_n > 0, a_{n-1} > 0$,
 т.к. $a_i > \frac{2022}{2021}$. Мы знаем, что $2 - a_1 = 2 - (2 - \frac{1}{2022}) = \frac{1}{2022} > 0$, поэтому
 $a_2 = a_1 - a_1(a_1 - 1)(2 - a_1) \Rightarrow a_2 < a_1$. Тогда $a_3 = a_2 - a_2(a_2 - 1)(2 - a_2) \Rightarrow a_3 < a_2$
 $(2 - a_2 > 0, \text{ т.к. } 2 - a_1 > 0, a_2 < a_1)$, и т.д. по индукции получаем
 что $a_{n+1} < a_n$. Поэтому $\frac{2022}{2021} < a_n \leq 2 - \frac{1}{2022}$.

$a_n(a_n - 1)(2 - a_n) \geq \frac{2022}{2021} \cdot \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2022} = \frac{1}{2021^2}$.
 Это есть какое-то следующее число хотя бы на $\frac{1}{2021^2}$ меньше
 предыдущего. Тогда $a_2 \leq a_1 - \frac{1}{2021^2}, a_3 \leq a_1 - \frac{2}{2021^2}, a_n \leq a_1 - \frac{n-1}{2021^2}$.
 Возьмем $n = 2021^2 + 1$. Тогда $a_{2021^2+1} \leq a_1 - \frac{2021^2}{2021^2} = a_1 - 1 = 2 - \frac{1}{2022} - 1 =$
 $= 1 - \frac{1}{2022} < 1$. ~~Но мы ранее получили, что~~ Но мы ранее получили, что

$a_i > \frac{2022}{2021} > 1$ — противоречие.

№6. Нам нужно, чтобы решением являлся интервал ~~тогда~~
 $(x; x+1)$, круглые скобки, т.к. строгое нер-во. Но тогда на его
 концах будут достигать равенство:

$$|x^3 + 2x^2 + x - a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| = 4x^2 + 8x \quad (1)$$

$$|(x+1)^3 + 2(x+1)^2 + (x+1) - a| + |(x+1)^3 - 2(x+1)^2 + (x+1) - a| = 4(x+1)^2 + 8(x+1)$$

После раскр. скобок второе уравнение принимает вид:

$$|x^3 + 5x^2 + 8x + 4 - a| + |x^3 + x^2 - a| = 4x^2 + 16x + 12. \quad (2)$$

Рассм. случаи раскр. модулей в ур-нии (1):

1) ++; $2x^3 + 2x = 4x^2 + 8x; x^3 + x = 2x^2 + 4x; x^3 - 2x^2 - 3x = 0; x(x^2 - 2x - 3) = 0;$
 $x(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 3$. Проверим нер-ва при раскр. модулей:

$x = 0: \begin{cases} a \geq 0 \\ -a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$
 $x = 3: \begin{cases} 27 + 18 + 3 - a \geq 0 \\ 27 - 18 + 3 - a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 48 - a \geq 0 \\ 12 - a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \in [-48; 12]$

2) --; $-(2x^3 + 2x) = 4x^2 + 8x; -x^3 - x = 2x^2 + 4x; 2x^3 + 4x^2 + 10x = 0; x(x^2 + 2x + 5) = 0;$
 $\begin{cases} a \geq 0 \\ -a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0$
 3) +-; $4x^2 + 2a = 4x^2 + 8x; x = \frac{a}{2}$

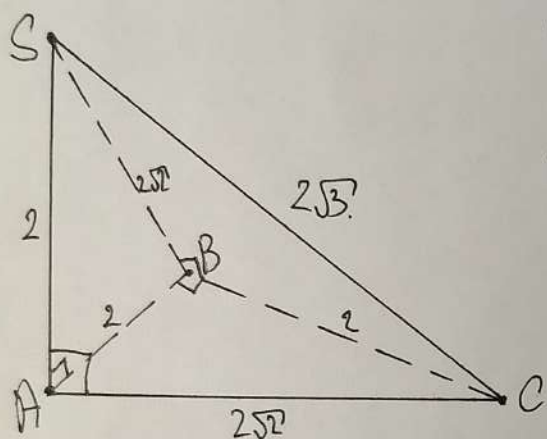
Условие №6 (проверка).

$a=7$; $a=x+y \Rightarrow x=3$ $\begin{cases} x^3+5x^2+8x+y+a \geq 0 - \text{верно} \\ x^3+x^2-a \leq 0 - \text{не верно} \end{cases} \Rightarrow a=7 - \text{не пох.}$

~~а=10/3~~ $a=x+y \Rightarrow x=\frac{4}{3}$ $\begin{cases} x^3+5x^2+8x+y+a \geq 0 - \text{верно} \\ x^3+x^2-a \leq 0 - \text{не верно} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{16}{3} - \text{пох.}$

Ответ: $a=0$; $a=8$; $a=-24$; $a=\frac{16}{3}$.

№5.



т.к. $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, то $SA \perp (ABC)$
 $\Rightarrow \angle SAB = \angle SAC = 90^\circ$

$SA = AB = BC = 2$. По теор. Пифагора:

$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $SB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$;

$SC = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Заметим, что $R = AC = SB = 2\sqrt{2}$

где R - радиус сферы, т.е. сфера проходит через точку B.
 $\triangle SAC = \triangle SBC$ по трем сторонам $\Rightarrow \angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$.

BE сфера, $CB \perp SB \Rightarrow CB$ - касательная к сфере в точке B.
 $\angle SBC = \angle ABC = 90^\circ \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{(a_n^3 - 3a_n^2 + 2a_n)}{a_n(a_n-1)(a_n-2)} = a_n - \frac{a_n(a_n-1)(2-a_n)}{a_n(a_n-1)(2-a_n)}$$

$$a_n(a_n - 1)(2 - a_n) \geq \frac{2021}{2021} \cdot \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{2022} = \frac{1}{2021^2}$$

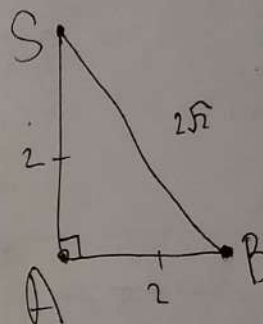
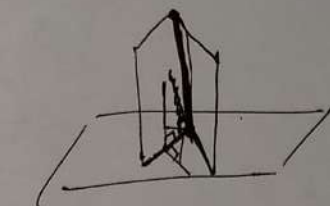
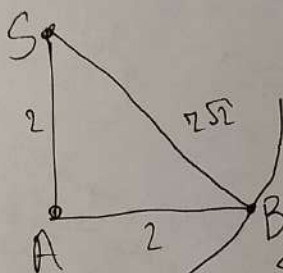
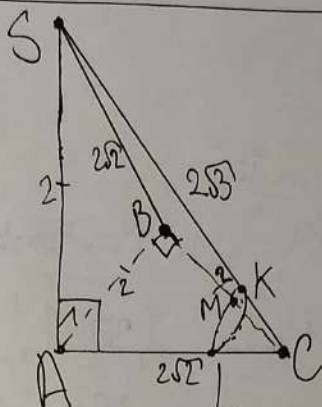
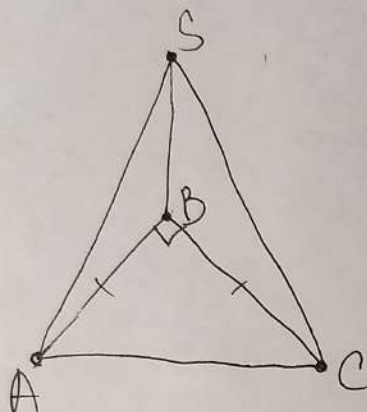
Черновик

6

$$\frac{2022}{2021} \alpha_n \leq 2 - \frac{1}{2022}$$

$$u = 2az^2 + 1$$

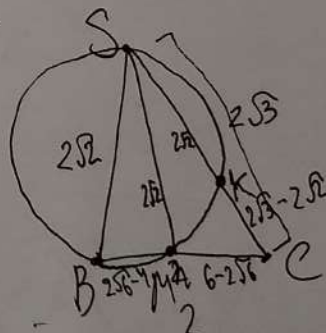
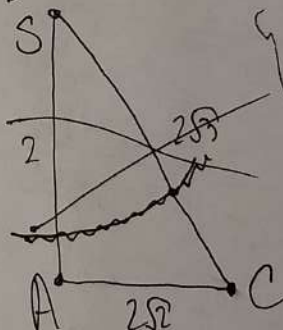
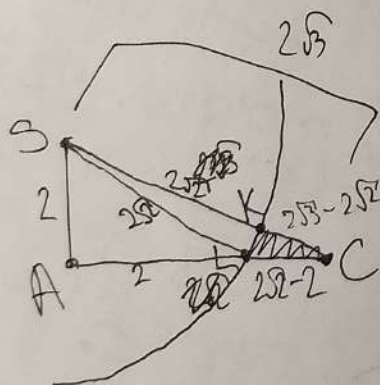
~~$\alpha_n \leq \alpha_1 - 2 =$~~



$$\begin{cases} a \leq -48 \\ a \leq 12 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 148 \times a, 0 \\ 12 - a, 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 27+18+3+a \geq 0 \\ 27-18+3-a \geq 0 \end{cases}$$



$$x \rightarrow x+1;$$

$$\begin{aligned} & (x+1)^3 + 2(x+1)^2 + x + a = \\ & = \cancel{x}^3 + \underline{3x^2} + \underline{3x} + 1 + \underline{2x^2} + \underline{4x} + 2 + \cancel{x} + a = \\ & = x^3 + 5x^2 + 8x + 3 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cancel{x^4} + \cancel{2x^3} + \cancel{3x^2} - \cancel{2x} - 2 \cancel{1} - a = \\ & = x^3 + x^2 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4(x+1)^2 + 8(x+1) = \\ & = 4x^2 + 8x + 4 + 8x + 8 = \\ & = 4x^2 + 16x + 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{16 - 2\sqrt{5} = \text{cm}}$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

Черновик (7)

$$2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x$$

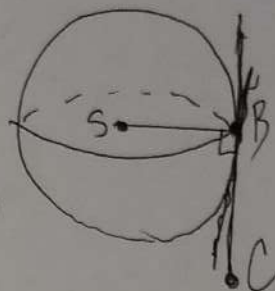
$$x^3 + x < 2x^2 + 4x$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x < 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$x(x+1)(x-3) < 0$$

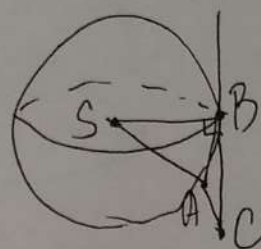
$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 3)$$



$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |-x^3 + 2x^2 - x + a| \geq 4x^2 + 2a$$

$$4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x$$

$$x > \frac{a}{4}$$



$$++: 2x^3 + 2x < 4x^2 + 8x$$

$$x^3 + x < 2x^2 + 4x$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x < 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$x(x+1)(x-3) < 0$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 3)$$



$$+-: 4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x$$

$$x > \frac{a}{4}$$

$$x > \frac{a}{4}$$

$$-+: -(4x^2 + 2a) < 4x^2 + 8x$$

$$8x^2 + 8x + 2a > 0$$

$$D = 64 - 64a$$

$$\frac{-8 \pm 8\sqrt{1-a}}{16} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{1-a}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{1-a}}{2}$$

$$x^3 + 2x^2 = x^2(x+2)$$

$$4x^2 + 8x = 4x(x+2)$$

$$x^3 + x = a$$

$$x^3 + x = y$$

$$2x^2 + a = z$$

$$|y+z| + |y-z| < 4x^2 + 8x$$

$$|y| + |z| < \frac{4x^2 + 8x}{4x(x+2)} = \frac{4x^2 + 8x}{4x(x+2)}$$

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a = y \\ x^3 - 2x^2 + x - a = z \end{cases}$$

$$4x^2 + 2a = y - z$$

$$2x^2(x+2) = y - a - x$$

Черновик

6, 7, 8, 9, 10, ...

2^3 3^2

8

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x ²	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
x ³	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197

$$\begin{array}{r} \times 121 \\ 11 \\ \hline 121 \\ \hline 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ \hline 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ \hline 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2^3, 3^3, \dots, 12^3 \\ 2^2, 3^2, \dots, 45^2 \\ 44 \end{array}$$

$$11 + 44 - 2 = 55 - 2 = 53$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ \hline 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$46^2 = 2116$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 46 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$x^3 = y^2$$

$$\begin{array}{l} k6 \\ 26, 36, 46 \\ 40\% \end{array}$$

6, 7, 8, 9, 10, ... 2027, ...
1 2 3 4 5 2022

$$\begin{array}{r} 2022 \\ 53 \\ \hline 1969 \end{array}$$

$$11 + 43 - 2 = 54 - 2 = 52$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$$

$$\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3} \cos 40^\circ}{4 \cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{2 \sin 45^\circ \cos 50^\circ}{2 \cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ} = 1$$

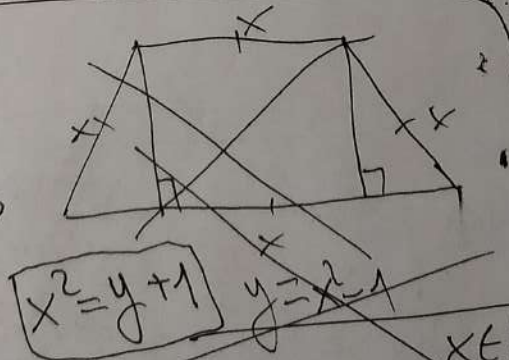
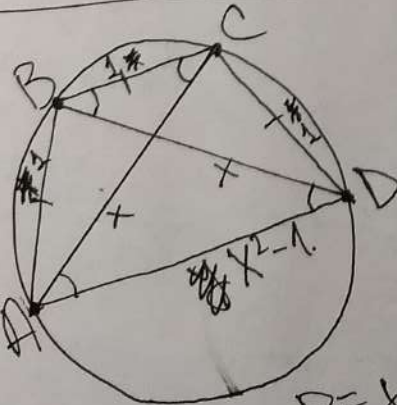
$$\arccos(1) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}; \quad 27 + 4 \cdot \frac{9}{4} - 18 \cdot \frac{3}{2} - 9 = 27 + 9 - 27 - 9 = 0$$

$$4x^2 + 8x + 3 = 12$$

$$D = 64 - 48 = 16$$

$$\frac{-8 \pm 4}{8} = -\frac{2 \pm 1}{2} = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$$



$$(4x^2 - 9)(2x + 1) = 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$$

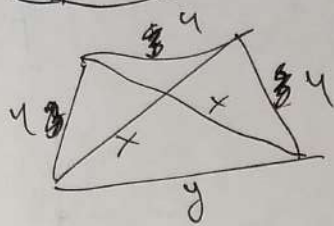
$$P = x^2 + 2x \rightarrow \min$$

$$x = 2, P = 8$$

$$x \neq 1, 2 \quad 2, 2, x$$

$$x = 1, 2, 3$$

Черновик



$$4 + 2y = x^2; y = \frac{x^2 - 4}{2}$$

~~x = 4, 13~~

$$x^2 = 9 + 3y; y = \frac{x^2 - 9}{3}$$

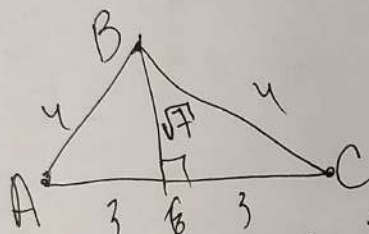
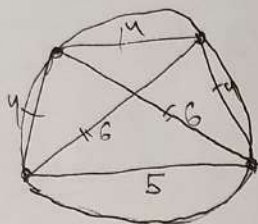
$$x = \dots$$

$$x^2 = 16 + 4y; y = \frac{x^2 - 16}{4}$$

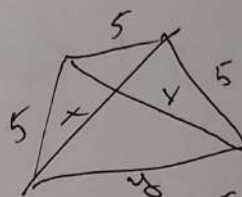
$$x = \dots$$

$$x = 6; y = \frac{20}{4} = 5$$

$$P = 9 + 8 = 17$$



$$S = 3\sqrt{7} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4R}; R = \frac{248}{357}$$



$$x^2 = 25 + 5y; y = \frac{x^2 - 25}{5}$$

$$x = \dots$$

$$\frac{x^2 - 4}{2}$$

$$\frac{x^2 - 9}{3}$$

$$\frac{x^2 - 16}{4}$$

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3)$$

$$a_{n+1} \approx 2(4 - 6 + 3) = 2$$

$$a_n^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} a_n + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}$$

$$(a_n - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n \vee a_n$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 + 2a_n \vee 0$$

$$a_n(a_n^2 - 3a_n + 2) \vee 0$$

$$a_n(a_n - 1)(a_n - 2) \vee 0$$

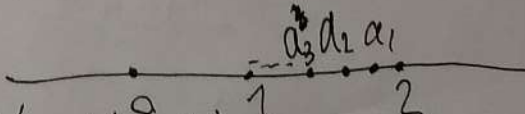
$$a_n(a_n - 1)(a_n - 2) \vee 0$$

$$n=1: \dots$$

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$a_2 < a_1$$

$$a_i \geq 0$$



$$a_2 - a_1 = (2 - \frac{1}{2022})(1 - \frac{1}{2022})(-\frac{1}{2022})$$

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{2022}(2 - \frac{1}{2022})(1 - \frac{1}{2022})$$