



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Валитов Денис Радикович**

Класс: **9**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Валитов Денис Радикович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Условие 1.
1.1.

	Автомобиль	Работники	т
I д.	10 ч.	$y+7$	1
II д.	$x-10$	y	$\frac{1}{2}$

y - число рабочих во II день

$\frac{10}{y+7} \cdot \frac{x-10}{2y}$ - производительность одного рабочего

$$\frac{10}{y+7} = \frac{x-10}{2y}$$

Пусть x - чадок, m - рабочих в I д, а v - чадок произв. 1 рабочего.

В I д.: $v = \frac{10}{m}$

Во II д.: $x-10 = \frac{v}{2} \cdot \frac{40}{2m} = \frac{35}{m} \Rightarrow x = 10 + \frac{35}{m}$. $m > 7$, x - целое $\Rightarrow m = 35 \Rightarrow x = 11$

$$\frac{x-10}{2} = 10$$

$$x-10 = 20$$

$$x = 30$$

$$|\overline{bc} - \overline{cb}| = 72$$

~~$$\begin{cases} c-b=2 \\ b-c=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=2+b \\ b=c-4 \end{cases}$$

$$2+b=b-4$$~~

черновик 2.

~~$$\begin{array}{r} 91 \\ -19 \\ \hline 72 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 92 \\ -23 \\ \hline 69 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 10 \\ -10 \\ \hline 0 \end{array}$$~~

$$191 \text{ и } 119$$

и т.д.

$$(2+2+2+2+2+2+2+2+2)$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ -108 \\ \hline 72 \end{array}$$

$$(\overline{abc} - \overline{acb}) : 72$$

$$a-a=0 \Rightarrow (\overline{bc} - \overline{cb}) : 72 \Rightarrow \overline{bc} - \overline{cb} = 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{I } \overline{bc} = 91; \overline{cb} = 19 \\ \text{II } \overline{bc} = 80; \overline{cb} = 08 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \overline{bc} = 19; \overline{cb} = 91 \\ \overline{bc} = 08; \overline{cb} = 80 \end{cases} \text{ 4 вар. для } a=0; 1 \dots 9 \Rightarrow$$

Лог решение: При вычитании 3-х значных чисел а-б-в-г
сотни (а) не будут играть роли $\Rightarrow |\overline{bc} - \overline{cb}| : 72 \Rightarrow |\overline{bc} - \overline{cb}| = 72$

~~$$\Rightarrow 40$$~~

$$126$$

При $k=0$ число 90.

$$\begin{array}{r} 126 \\ -36 \\ \hline 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

Задача 3.

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$x^2+xy+x+xy+y^2+2y=2022$$

$$x^2+2xy+y^2+x+2y=2022$$

$$(x+y)^2+2y+x=2022$$

Пусть $x+y=t$, тогда:

$$t^2+t+y=2022=0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(y-2022)}}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{809 - 4y})$$

$$(x+y)^2+x=2(1011-y)$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &\left. \begin{array}{l} x+y - \text{нечёт} \\ x - \text{нечёт} \end{array} \right\} \Rightarrow y - \text{нечёт} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 28 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 1010 \\ \hline 10100 \\ 10100 \\ \hline 102010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 50 \\ \hline 2550 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 48 \\ \hline 280 \\ 280 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times 44 \\ \hline 172 \\ 172 \\ \hline 1892 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 45 \\ \hline 220 \\ 1980 \\ \hline 1980 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 48 \\ \hline 138 \\ 138 \\ \hline 1648 \\ + 46 \\ \hline 2024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 176 \\ \hline 1936 \end{array}$$

Черновик 4.

№5.

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$a = 0 \dots 99 \Rightarrow n_a = 100.$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2022 = a^2 - 8088 > 0 \Rightarrow a^2 > 8088 \Rightarrow a = 90 \dots 99$$

По м. Виета: $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow$ сумма корней $= -(90 \dots 99) = -\frac{90+99}{2} \cdot 10 =$
 $= -945.$

$$\begin{array}{r} +90 \\ +99 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 189 \overline{) 18} \\ \underline{18} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 5 \\ \hline 220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ \times 4 \\ \hline 8088 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +90 \\ +99 \\ \hline 189 \end{array}$$

Черновик 5.

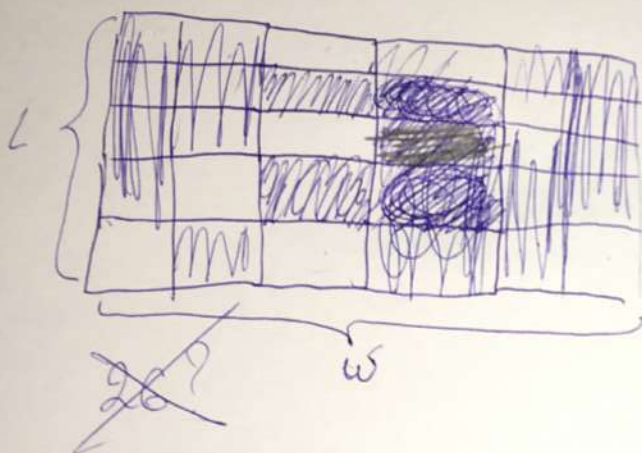
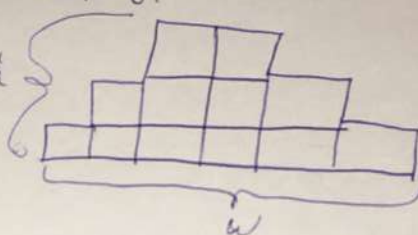
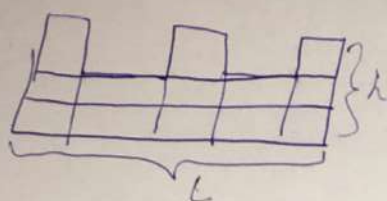
№6.

Галактика $\mathbb{H}$ — планета $\mathbb{I}$, а Кандела — планета n'
 P — прыжки из $\mathbb{I}$ в n .

- 1) если $2 \leq n \leq 41$, т.е. между ними есть прямой портал, то $P=1$.
- 2) если $42 \leq n \leq 81$, то сначала будет прыжок на планету $\omega 2$ до 41, потом на Канделу $\Rightarrow$
 $\Rightarrow P=2$.
- 3) если $82 \leq n \leq 100$, то +1 прыжок $\Rightarrow P=3$.

$P=1 / P=2 / P=3$.

Чертеж 6.



 - Рыбак
 - хищники.

Числовик 1.
№5.

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$a = 0 \dots 99$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2022 = a^2 - 8088 > 0 \Rightarrow a^2 > 8088 \Rightarrow a = 90 \dots 99$$

По т. Виета $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow$ сумма всех действительных корней $= -(90 \dots 99) =$
 $= - \frac{90 + 99}{2} \cdot 10 = -945$

Ответ: -945 .

Условие 2.

№2.

$$\overline{abc} - \overline{acb} : 72.$$

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c; \quad \overline{acb} = 100a + 10c + b$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b - c)$$

$$\frac{9(b-c)}{72} = \frac{b-c}{8} \Rightarrow \begin{cases} b=c & (1) \\ b-c=8k & (2) \end{cases}$$

(1) — числа вида $\overline{abb}$, таких чисел 90

(2) $k=1 \Rightarrow b-c=8 \Rightarrow \begin{cases} b=8, c=0 \\ b=9, c=1 \end{cases}$ — таких чисел 18

$k=-1 \Rightarrow b-c=-8 \Rightarrow \begin{cases} b=0, c=8 \\ b=1, c=9 \end{cases}$ — таких чисел 18

Всего чисел: $90 + 18 + 18 = 126$

Ответ: 126 чисел.

Числовик 3.

№ 3.

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$(x+y)^2 + 2y + x - 2022 = 0$$

Пусть $t = x+y$, тогда $t^2 + t + y - 2022 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(y - 2022)}}{2}. \text{ Выходит только}$$

$$t = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{8089 - 4y}) \Rightarrow 8089 - 4y - \text{полный квадрат нечетного целого числа.}$$

$$89^2 < 8089 < 90^2$$

1) для 89: $8089 - 4y = 89^2 = 7921 \Rightarrow 4y = 168 \Rightarrow y = 42, t = 44 = x + 42 \Rightarrow x = 2$

2) для 87: $8089 - 4y = 87^2 = 7569 \Rightarrow y = 130, t = 41 = x + 130 \Rightarrow x = -89 \notin \mathbb{N}$
 y будет увеличиваться $\Rightarrow x$ уменьшится и будет < 0 .

Ответ: $x = 2; y = 42$.

№ 1.

Числовая 4.

Пусть x — урожай, m — рабочих в I день, а v — производительность одного рабочего.

В I-й день: $v = \frac{10}{m}$

Во II-й день: $x - 10 = \frac{v}{2} \cdot 7 = \frac{70}{2m} = \frac{35}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10 + \frac{35}{m}$. $m > 0$, x — целое число $\Rightarrow m = 35$

$x = 10 + 1 = 11$ урожай

Ответ: 11 урожай.

Честовик 5.

№ 6.

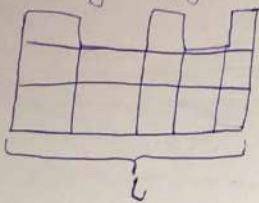
Пусть Галактика 37 — планета 1, а Канидора — планета n .

P — количество прыжков из 1 в n .

- 1) если $2 \leq n \leq 41$, т.е. между ними есть прямой портал, то $P=1$
- 2) если $42 \leq n \leq 81$, то сначала будет прыжок на планету с 2 по 41, а потом на Канидору $\Rightarrow P=2$.
- 3) если $82 \leq n \leq 100$, то добавится еще один прыжок $\Rightarrow P=3$.

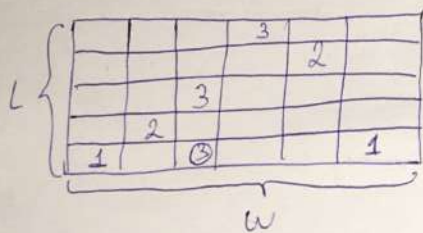
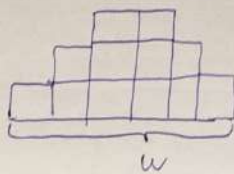
Ответ: 1, 2 или 3.

Вид сверху.



Чистовик 6.
№4.

Вид сбоку



Поставим на пересечения башни нужной высоты, тогда не хватает только башни для l (крайняя правая).

Доставив ③ получим число кубиков = 7.

4 минимальное число, т.к. ставим только необходимые кубики.

Ответ: 7.