



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Давлетов Александр Ярославович**

Класс: **7-8**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Давлетов Александр Ярославович

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

№1.

Заметим, что первые 7 жителей по количеству кокосов всегда имеют. Значит, имеют хотя бы 7. Заметим, что первые 6 жителей по количеству банок бананов всегда рыцари. Если есть хотя бы ещё 1 рыцарь, то у него будет бананов меньше чем у первых 6 по количеству бананов. Тогда, он не может. Значит, рыцарей ровно 6. Пусть, имеют хотя бы 8. Тогда у одного из жителей кокосов будет меньше чем у 7 других. И он будет говорить правду, чего быть не может. Значит, имеют ровно 7.

Пример:

Бананы: рыцари: 13; 12; 11; 10; 9; 8.

Имеют: 7; 6; 5; 4; 3; 2; 1.

Кокосы: имеют: 13; 12; 11; 10; 9; 8; 7.

рыцари: 6; 5; 4; 3; 2; 1.

Ответ: один вариант 7 жителей, 6 рыцарей.

№2.

За пол дня указанное число рабочих выкопало бы $\frac{10}{2} = 5$ предков. Значит, 7 человек на следующий день выкопали меньше 5 предков. Есть варианты 1; 2; 3; 4. Пусть 4. Тогда, за день они бы выкопали 8 предков, а надо в $\frac{5}{4}$ раза больше. Значит, людей тоже надо в $\frac{5}{4}$ раза больше $\frac{5}{4} \cdot 7 = \frac{35}{4}$. Не целое число. Такого быть не может. Пусть, выкопали 3 предки за день. пол дня. Тогда, за день 6 предков, а было в $\frac{5}{3}$ раза больше. Значит, было людей в $\frac{5}{3}$ раза больше $\frac{5}{3} \cdot 7 = \frac{35}{3}$. Не целое число рабочих быть не могло. Пусть выкопали 2 предки за пол дня. Значит, за день они бы выкопали 4 предки, а надо в $\frac{5}{2}$ раза больше. Тогда, людей было в 2,5 раза больше. $7 \cdot 2,5 = 17,5$. Не целое не может быть. Пусть, 1 предку за пол дня. За день тогда они выкопали 2 предки, надо в 5 раз больше. Значит, людей было в 5 раз больше. $7 \cdot 5 = 35$. Такое ~~бы~~ возможно.

Ответ. Всего было 11 предков.

13

Числовик

Заметим, что $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, а $\overline{acb} = 100a + 10c + b$.
 Значит, $\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c$.
 При b и c меньше 10. Если $b < c$, то $9b < 72$. Значит,
 разность будет равна 0 если кратна 72. Чисел, где $b = c$
 $9 \cdot 10 = 90$. Если $b \neq c$, то $b \geq c$. При $b = c$. $9b = 72$. Значит,
 $c = 0$. Если $b = 9$, то $c = 1$. Всего чисел $90 + 2 = 92$.

Ответ: 92 числа

Числовик

✓ 4

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100. \text{ Если } (x+y) > 9, \text{ то } (x+y)(x+y+1) > 110.$$

И так как, $y > 0$, то уравнение будет неверно. Значит, $(x+y) \leq 9$. Тогда, $x < 9$; $y < 9$. Пусть $(x+y) = 9$.

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100.$$

$$9 \cdot 10 + 2y = 100$$

$$2y = 10$$

$$y = 5. \text{ Значит,}$$

$$x = 9 - 5.$$

$$x = 4.$$

Пусть, $(x+y) \leq 8$. При $(x+y) = 8$,

$$8 \cdot 9 + 2y = 100$$

$$2y = 28$$

$y = 14$. Это быть не могло. Так как, при уменьшении $(x+y)$ увеличивается y , то и все значения $(x+y) \leq 8$ не подходят. Значит, есть один вариант.

Ответ: $x = 4$; $y = 5$.

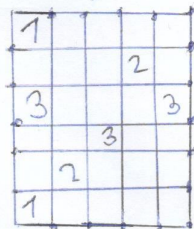
15

Рассмотрим, сколько столбцов и из скольких клеток они должны быть, по виду спереди видим 3 столбца по 3 и два по 2. По виду сбоку видим 2 ~~столбца~~ столбца по 3, 2 столбца по 2, 2 столбца по 1. Всего $2+2+3=7$ столбцов может быть достаточно.

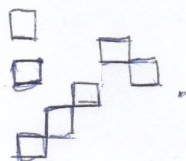
Пример:

Если клетка пуста в ней нет ни одного кубика. Если есть цифра, то это количество клеток в столбце.

Вид сверху:



то есть получится вид сверху так:



1/6.

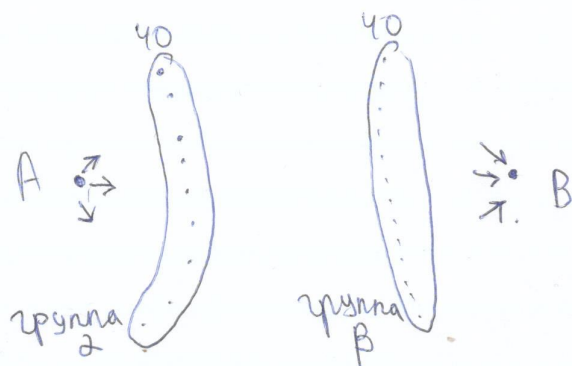
Чистовик

Здесь, планеты это вершины графа, а порталы рёбра.

Здесь, Галатея - 37 это вершина А, а Пандора - вершина В.

Если А и В связаны порталом, то прыжок понадобится один $A \rightarrow B$. Здесь, не связаны, но от одной из вершин с которой связана А можно добраться до В.

$A \rightarrow C \rightarrow B$. 2 прыжка. Здесь так не произошло. Рассмотрим вершины до которых можно добраться из А и из которых можно добраться в В.



За степень вершины обозначим количество вершин до которых можно добраться из данной вершины. Степень каждой вершины 40.

Сумма степеней группы 2 равна 40. А сумма степеней вершин внутри группы не больше $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$. Значит, найдётся вершина из которой можно добраться до хотя бы 20 планет не принадлежащих группе 2. Значит, найдётся планета в группе В до которой можно добраться из планеты группы 2. $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$. Значит, потребуется не более 3 прыжков.

Ответ: потребуется или 1 прыжок, или 2 прыжка, или 3 прыжка.

9

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100$$

$$(x+y)^2+x+y+2y=100$$

$$(x+y)^2+x+3y=100$$

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100$$

$$2a \quad 2a+1$$

$$a(2a+1)+ay=50$$

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100$$

$$9 \quad 10 \quad 5$$

$$8 \quad 9$$

~3

$$100a+10b+c-100a-10c-b=9b-9c$$

~2

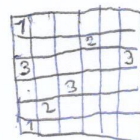
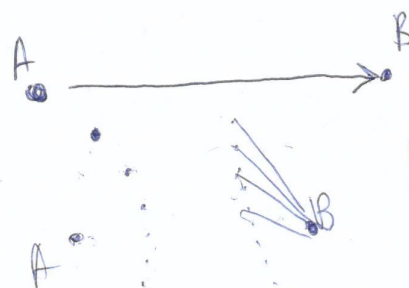
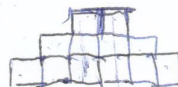
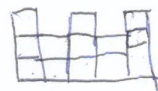
$$x \cdot 1 = 10a \quad a$$

$$7 \cdot 0,5 = a - 10a$$

$$7a \cdot 0,5 = 3,5a$$

8

7 6



82 планеты

$$\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$$

$$\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$40 \cdot 21 =$$

$$\frac{1600}{40} = \frac{82}{4} = 20,5$$