



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Сударев Иван Олегович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Сударев Иван Олегович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Число

10

$$3) a=3$$

$$\begin{aligned} 2a &> p & 3+b > p \\ 2a &> q & 3+b > q \end{aligned}$$

$$pq = a^2 + ab = 9 + 3b$$

$$\text{Если } b=1, \text{ то } pq=12=2 \cdot 6=1 \cdot 12=3 \cdot 4$$

$$4 > p, 4 > q, \text{ т.к. } 3+b=4$$

не ОА

$$\text{Если } b=2, \text{ то } 9+3b=15=1 \cdot 15=3 \cdot 5$$

$$\begin{aligned} 3+b=5 & & 5 > p & & \text{не ОА} \\ & & 5 > q & & \end{aligned}$$

$$\text{Если } b=3, \text{ то } 9+3b=18=2 \cdot 9=3 \cdot 6=1 \cdot 18$$

$$\begin{aligned} b &> p & & \text{не ОА} \\ b &> q & & \end{aligned}$$

$$\text{Если } b=4, pq=21=3 \cdot 7=1 \cdot 21$$

$$\begin{aligned} p &< 2 & & \text{не ОА} \\ q &< 2 & & \end{aligned}$$

$$\text{Если } b=5, \text{ то } pq=24=4 \cdot 6=3 \cdot 8=2 \cdot 12=1 \cdot 24$$

$$\begin{aligned} 2a=6 &> p, & & \text{не ОА} \\ b &> q & & \end{aligned}$$

$$\text{т.к. } p \leq 5, q \leq 5, \text{ то } pq = 9 + 3b \leq 25$$

$$9 + 3b \leq 25$$

$$b \leq 8$$

~~$$\text{Если } b=6, \text{ то } pq=27=3 \cdot 9=1 \cdot 27=\text{не ОА}$$~~

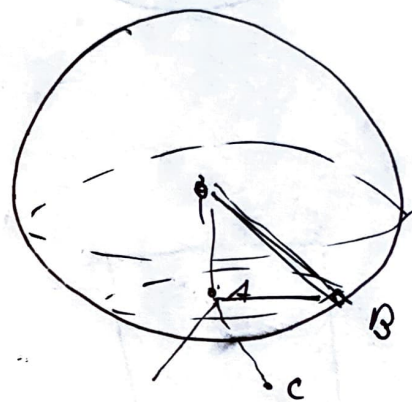
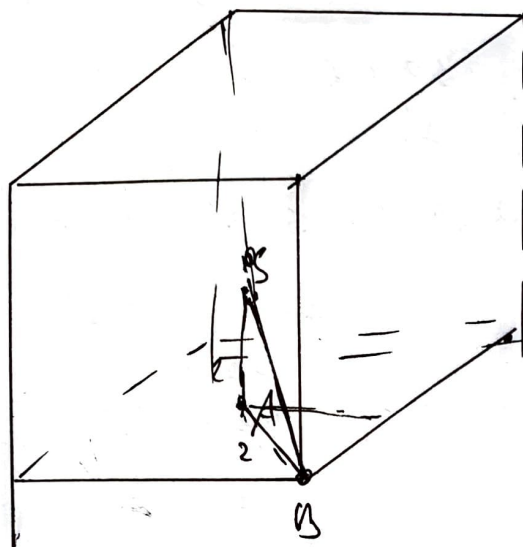
~~$$\text{Если } b=7, \text{ то } pq=30=3 \cdot 10=6 \cdot 5=15 \cdot 2$$~~

~~$$p < 6$$~~

~~$$q < 6$$~~

Чертёж

12



$$-x-1 = -x-2+1$$

$$x \rightarrow -2-x$$

$$(-2-x)(-1-x)^2+a$$

Задача 6

Решения - применение формулы 1.

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x. \quad (xx)$$

$$\Downarrow$$

$$4x(x+2) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty).$$

Кусок 20

$$\text{т.к. } |A| + |B| \geq |A+B|$$

$$|A| + |B| \geq |A-B|,$$

Все решения (xx) также являются

$$\text{решениями } 4x^2 + 8x > |2x^3 + 2x| \quad (1)$$

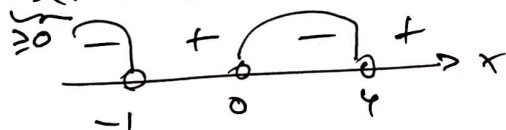
$$4x^2 + 8x > |4x^2 + 2a| \quad (2)$$

$$(1): \text{сл. } x \geq 0$$

$$4x^2 + 8x > 2x^3 + 2x$$

$$2x^3 - 3x - 4x^2 < 0$$

$$x(x-4)(x+1) < 0$$



$$\text{т.к. } x \geq 0, x \in (0; 4)$$

$$\text{сл. } x \leq 0$$

$$4x^2 + 8x > -2x^3 + 2x$$

$$x^3 + 5x + 4x^2 > 0$$

$$x(x^2 + 4x + 4 + 1) > 0$$

$$\text{т.к. } x \leq 0 \text{ и } x^2 + 4x + 5 > 0$$

Значит, $x \in (0; 4)$ - и, следовательно, все решения (xx).

$$|x(x+1)^2 + a| + |x(x-1)^2 - a| \leq 4(x+1)^2 - 4$$

$$0 > 0.$$

$$196 \cdot 4 = 800 - 16 = 7$$

Чепуров

14

$$4^6 = 2^{12}$$

$$46^2 = 45^2 + 2 \cdot 45 + 1$$

$$120 \cdot 3 = 510$$

$$121 \cdot 11 = 1210$$

$$15 \cdot 14^2 = 196 \cdot 14 = 1960 +$$

$$46^2 = 2025 + 1 + 45 \cdot 2 = 2026 + 90 = 2116$$

$$13^3 = \begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 502 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$3x^2 + 4x + 1$$

$$x - 5 - 52 =$$

$$12^3 = 144 \cdot 12 = 288 + 1440 = 1500 + 228 = 1728$$

$$16 - 12 = 4$$

$$x - 52$$



$$\begin{array}{c} X \\ \hline x-5 \end{array}$$

$$x - 5 = 2022$$

$$x$$

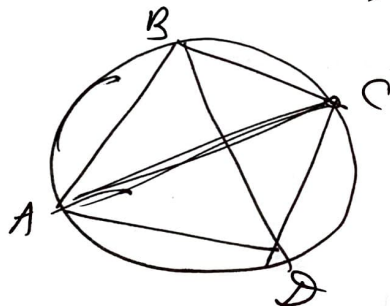
$$\begin{array}{l} \swarrow 165.60^\circ \\ \swarrow \sin 60^\circ \end{array}$$

$$ax = ag + gb$$

$$\frac{1}{4 \cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4 \sin 40} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40}{2 \sin 60 \cos 40} =$$



$$4x^2(2x+1) - (2x+1) \cdot 9$$



$$pq = a^2 + ab$$

$$b = 0$$

$$q = a$$

$$a(a+b) = pq$$

$$3a + b = x$$

$$x(x-2a) = pq$$

$$a = 1:$$

$$a+1 = pq$$

$$q < 2a$$

$$q < a+b$$

$$p \geq a+b$$

$$p \geq 2a$$

$$a(a+b) = pq < 2a(a+b)$$

$$a < 2$$

$$q < 2a$$

$$p < a+b$$

$$a(a+b) \Rightarrow pq < 2a(a+b)$$

$$a=1$$

$$b+1=pq$$

$$2a > p \quad \text{Челусбук} \quad q \leq 3$$

$$p=1$$

$$pq=1$$

$$p \leq 3$$

$$2a > q$$

$$b=0?$$

$$pq \cdot$$

$$a=2$$

$$4+2b=pq$$

$$p \neq 1$$

$$b=1$$

$$3 > p$$

$$b=1$$

$$3 > q$$

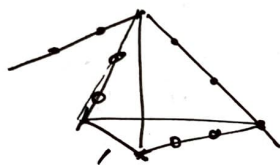
$$b=2$$

$$2a+q^2=8$$

$$b=3$$

$$4+b=10$$

$$9+3b$$



$$x+1$$

$$=x-a$$

$$a(a+b) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$a^2 +$$



$$4x(x+1) > 0$$

$$x(x^2-2x+1) =$$

$$= x(x-1)^2$$

$$x(x+1)^2$$

$$(-x(x-1)^2 - a) =$$

$$= |x(x+1)^2 + a|$$

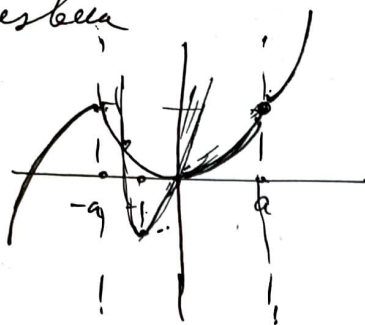
2de puzbeen

16

$$-2x^3 - 2x$$

$$4x^2 + 2a$$

$$2x^3 + 2x$$

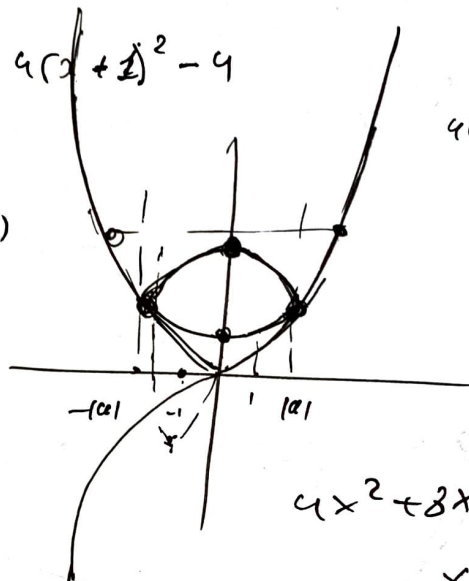


$$4(x+1)^2 - 4$$

$$4(x-1)^2 - 4$$

$$2x^3 + 2x = 2(x^3 + x)$$

$$= 2x^3 - 2x$$



$$A > |B|$$

$$x-1=t$$

$$2|x(x+1)| = |2x^3 + 2x| < 4x^2 + 8x = 4(x+1)^2 - 4$$

$$(4x^2 + 2a) < 4x^2 + 8x$$

$$4x^2 + 8x > 2x^3 + 2x$$

$$x^3 - 3x + 2x^2 < 0$$

$$x(x^2 + 2x - 3) < 0$$

$$x(x+3)(x-1) < 0$$

$$2x^3 + 2x > 4x^2 + 8x$$

$$x(x+3)(x-1) > 0$$

$$\boxed{a|} \quad x > 0$$

$$x+1$$

$$-2 - x + 1 = -1 - x$$

$$2x(x+1)^2$$

$$4x^2 + 8x > 2x^3 + 2x$$

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$x \rightarrow -2 - x$$

$$(-2-x)^3 + 2(-2-x)^2 - 2(-x) + a =$$

$$= -(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) + 2x^2 + 8x + 4 + 2x + a =$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 2x^2 + 8x + 4 + 2x + a =$$

$$-x^3 - 4x^2 - 2x - 4 + a$$

Umsuchen

17

$$3. a_n = |a_n| \leq \frac{2022}{2621}$$

$$1. a_{n+1} < a_n \quad 1 < a_n < 2$$

$$a \quad a_{n+1} = \underbrace{(a_n - 1)}_{\in (0; 1)}^2 \cdot (a_n - 1) + 1 < a_n - 1 + 1 = a_n$$

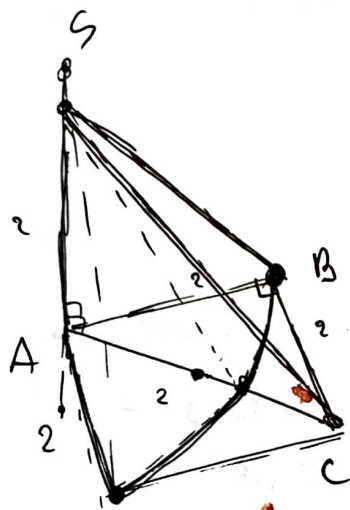
$$x = (x-1)^2 + 1$$

$$|x| + |y| \geq |x+y|$$

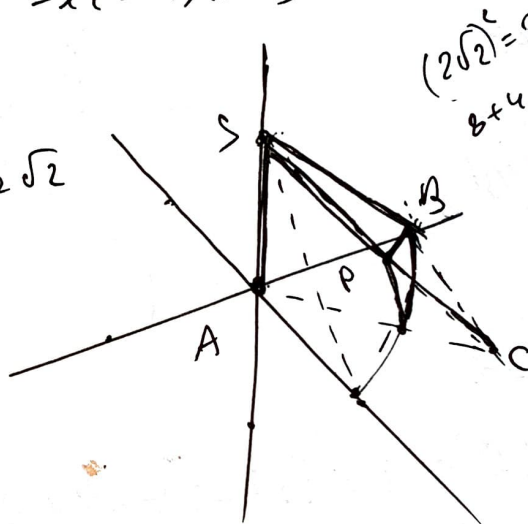
$$\cancel{3x^3} \quad x^3 - 3x^2 + 3x - x =$$

$$= x(x^2 - 3x + 2) =$$

$$= x(x-1)(x-2)$$



$$AC = 2\sqrt{2}$$

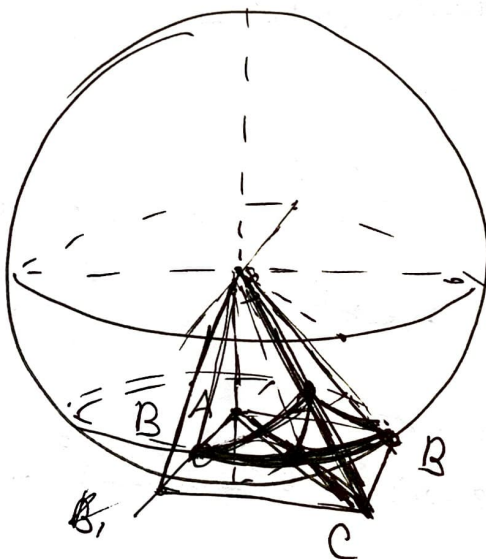


$$(2\sqrt{2})^2 = 8$$

$$8 + 4 = 12$$

$$SC = 2\sqrt{3}$$

$$1.2. \geq |4x^2 - 2a|$$



3agaza 1.

Честно

Baymax 11-1

6, 7, 8, 9, 10, ..., $\underbrace{n+5}_{\text{индекс } n}$, ... - исходная послед-76

Угадайся: 1) 8, 27, 64, 125, 216, 7³, 8³, 9³, 10³=1000, 11³, 12³, 13³, 14³, 15³,
2197

$$16^3 = 2^{12} = 4096, \dots$$

2) 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, \dots

Пусть M — мн-во удваиваемых чисел, а N — не удваиваем.
Найдем $M \cap N$. Если $x \in M \cap N$, то x — чётное в степени,
т.е. $M \cap N = \{64=2^6, 3^6, 4^6, 5^6, 6^6, 7^6, \dots\}$
4096

4096

Рассмотрим числа 1) $2^3, 3^3, \dots, 12^3 = 1728$. Замечим, что $13^3 = 2197$

2) $3^2, 4^2, 5^2, \dots, 45^2 = 2025$. Замечим, что

Числа 2⁶ и 3⁶ и только они
уделяют 198

↑ 46² = 2116
их 43 знака

дванды.

Итак, все мы рассмотрим $11 + 43 - 2 = 43 + 9 = 52$ шена.

После их удаления, число $x \in (2025; 46^2 = 2116)$ уменьшили
свои числа на 52. То есть теперь число x из указанного
интервала стало на 52 меньше $x - 5 - 52 = x - 57$.

То есть на август 2022 стоит номер $2022+57=2079$.

Chet: 207g.

Задача 2

Числовая

$$(2x^3 + 4x^2 - 12x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$\text{ОДЗ: } -1 \leq x-1 \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x \in [0; 2]$$

$$\text{Выразим } \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \sin 40^\circ + \sin 60^\circ \cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sin(100^\circ)}{\sin(80^\circ)} = 1.$$

$$\text{Значит, } \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \arccos(1) = 0.$$

$$\text{Рассмотрим } 8x^3 + 4x^2 - 12x - 9 = 4x^2(2x+1) - 9(2x+1) =$$

$$= (2x+1)(2x-3)(2x+3)$$

~~Заметим, что $\arccos(t)$ на ОДЗ имеет только одно значение, как~~

переменным пер-во с предом вынесением:

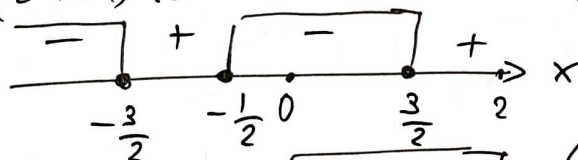
$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) \cdot \arccos(x-1) \leq 0.$$

Заметим, что $x=2$ — решение, т.к. $\arccos(x-1) = 0$ при $x=2$.

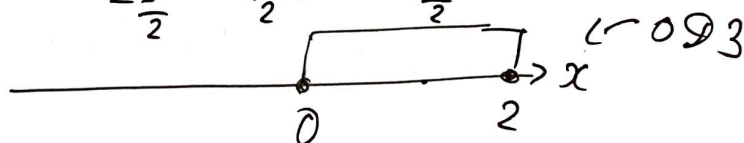
Если $x \neq 2$, то $\arccos(x-1) > 0$. Перем на пер-во пер-во.

$$x \in [0; 2)$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3) \leq 0$$



$$\text{ответ: } x \in [0; \frac{3}{2}]$$



$$\text{Ответ: } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}.$$

Задача 3

Числовые

$$BD = p, AC = q, DA = b, AB = BC = CD = a$$

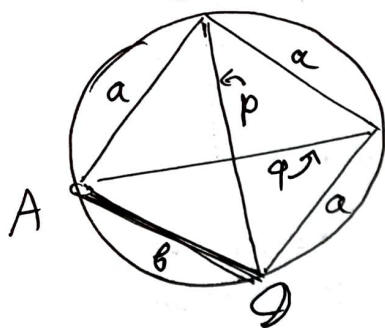
$$a, b, p, q \in \mathbb{Z}$$

$ABCD$ — вписан.

И хотим, что $ABCD$ не вписывается в треугольник.

$$3a + b \rightarrow \min$$

$$b - ?$$



Из т. Птолемея, $pq = ab + a^2$

X — периметр,

$$X = 3a + b$$

Заметим, что по неравенству треугольника,

$$2a > p$$

$$2a > q$$

$$a + b > p$$

$$a + b > q$$

Будем перебирать из центра (каждый раз по 2).

1) $a = 1$. $p < 2, q < 2 \Rightarrow p = q = 1$.

$$1 \cdot b + 1^2 = pq = 1$$

$$b + 1 = 0$$

$$b = -1 \text{?!}$$

2) $a = 2$ $p < 4, q < 4, \Rightarrow p \leq 3$

$$pq = a^2 + ab = 4 + 2b$$

$$q \leq 3$$

$$2 + b > p \Rightarrow p \leq b + 1$$

$$2 + b > q \Rightarrow q \leq b + 1$$

Если $b = 1$, то $pq = 4 + 2b = 6 = 2 \cdot 3$

$$\begin{cases} p = 1, q = 6 \\ p = 3, q = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} q = 1, p = 6 \\ p = 2, q = 3 \end{cases}$$

но так, т.к. $2 + b = 3 > p$

$$3 > q$$

значит нет.

т.к. $p \leq 3, q \leq 3, pq \leq 9$

$$2(2 + b) \leq 9 \Rightarrow 2(2 + b) \leq 8 \Rightarrow b \leq 2$$

т.к. $b \in \mathbb{Z}$

Если $b = 2$, то $pq = 8$ не представимо в виде

$$pq, \text{ где } p \leq 3 \text{ и } q \leq 3.$$

Задача 3

Числовые

034

т.к. $AB = CD$, $ABC D$ — μ/δ Трапеция $\Rightarrow$
 $\Rightarrow p = a$

тогда $p^2 = ab + a^2$, т.к. $p < 2a$
 $p^2 < 4a^2$
 $a^2 + ab < 4a^2$
 $b < 3a$

предположим a :

1) $a = 1$, $p < 2 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow b = 0?!$

$$p^2 = b + 1$$

2) $a = 2$, $p < 4 \Rightarrow p \leq 3$, $b \leq 5$

$$p^2 = 2b + 4$$

$$2b \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$2b + 4 \in \{6, 8, 10, 12, 14\} - \text{нет } p^2$$

3) $a = 3$, $p \leq 5$, $b \leq 3 \cdot 3 - 1 = 8$

$$p^2 = 3b + 9$$

$$(p-3)(p+3) = 3b \Rightarrow p \div 3 \Rightarrow p = 3, \text{ т.к. } p \leq 5 \Rightarrow b = 0?!$$

4) $a = 4$, $p \geq 7$, $b \leq 11$

$$p^2 = 4b + 16$$

$$b + 4 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

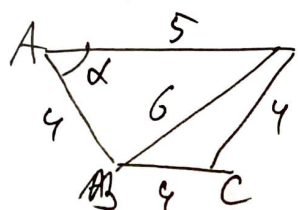
$$p = 2k, k^2 = b + 4$$

$$(k-2)(k+2) = b$$

единственный $\square = 9$.

$$b = 5, k = 3,$$

$$p = 6$$

Итак, $p = q = 6$, $b = 5$, $a = 4$.Периметр равен $12 + 5 = 17$.

$$\cos \alpha = \frac{16 + 25 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$R = \frac{6}{2 \sin \alpha} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: периметр 17,
 $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$.

Задача 4

Числовая

Ответ: Да, монотонно.

05

$$a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$$

Итак, мы имеем, что

$$a) \quad a_n \in (1; 2)$$

$$b) \quad a_{n+1} < a_n$$

$$a_2 = \left(2 - \frac{1}{2022}\right)^3 + 1 = 1 + \underbrace{\left(2 - \frac{1}{2022}\right)^2}_{< 1} \cdot \left(2 - \frac{1}{2022} - 1\right) < \\ < 1 + 2 - \frac{1}{2022} - 1 = 2 - \frac{1}{2022} = a_1.$$

Для $n=1$ - верно.Переход:

$$\text{Пусть } a_n \in (1; 2), \Rightarrow a_n - 1 \in (0; 1) \text{ и } (a_n - 1)^3 \in (0; 1).$$

$$\text{Итак, что } a) \quad a_{n+1} \in (1; 2).$$

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1 \in (1; 2), \text{ т.к. } (a_n - 1)^3 \in (0; 1).$$

верно.

$$b) \quad a_{n+1} < a_n$$

$$a_{n+1} = \underbrace{(a_n - 1)^2}_{\in (0; 1)} \cdot (a_n - 1) + 1 \leq a_n - 1 + 1 = a_n.$$

т.к. $a_n \in (1; 2)$

верно.

05

06

Числовая

Знаем, что a_n монотонно убывает и ограничена снизу числом 1, а сверху = 2.

Знаем, по т. Вейерштрасса, что есть предел A .

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. ~~Итак A — точная нижняя грань $\{a_n\}$~~

Возьмем его: $A = (A-1)^3 + 1 = A^3 - 3A^2 + 3A$

$$A(A^2 - 3A + 2) = 0$$

$$A(A-1)(A-2) = 0$$

Знаем, что $A \neq 0$, т.к. $a_n \in (1; 2)$.

$A \neq 2$, т.к. a_n — убывает.

Значит, $A = 1$.

Тогда, каковы бы ни были n , что $|a_n - A| < \frac{1}{2021}$

$$|a_n - 1| = a_n - 1, \text{ т.к. } \forall n, a_n > 1$$

$$a_n - 1 < \frac{1}{2021}$$

$$a_n < \frac{2022}{2021}, \text{ что и требовалось (} |a_n| = a_n, \text{ т.к. } \forall n, a_n > 0 \text{)}$$

Задача 5

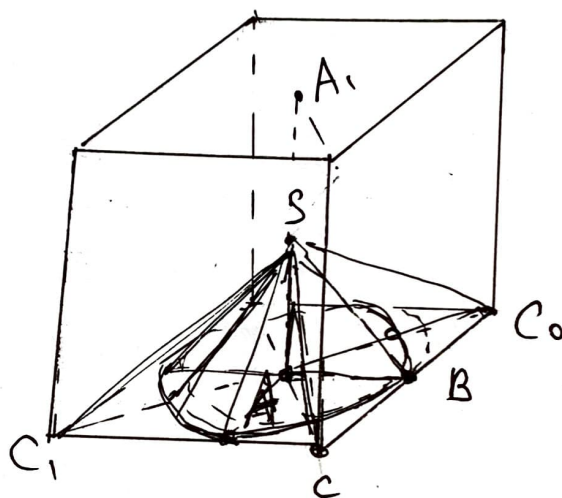
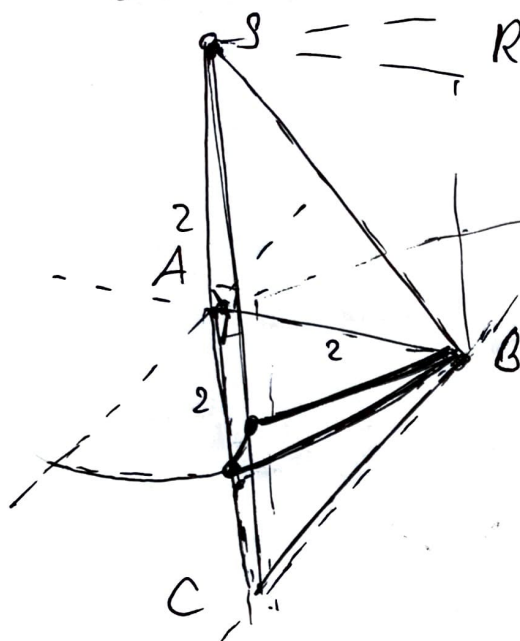
Условие

$$AB = BC = AS = 2 \Rightarrow AC = BS = 2\sqrt{2}$$

$R = 2\sqrt{2}$, центр - S , сфера ω
Заметим, что $S \in \omega$.

$$SC = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$$

Известен ~~параметр~~ куб. с центром S .



Задача 6 Числовая
 $g(x)$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < \overbrace{4(x+1)^2 - 4}^{f(x)} |x|$$

$$\underbrace{|x(x+1)^2 + a|}_A + \underbrace{|x(x-1)^2 - a|}_B < 4(x+1)^2 - 4 = 4x^2 + 8x$$

$$|A| + |B| \geq |A+B| = |2x^3 + 2x| \quad (1)$$

$$|A| + |B| \geq |A-B| = |4x^2 + 2a| \quad (2)$$

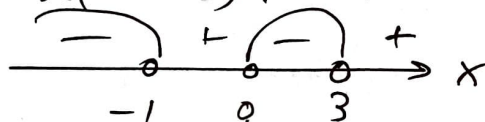
Значит, для x -решения (1): $4x^2 + 8x \geq |2x^3 + 2x|$

(1):

сл 1 $x \geq 0$: $4x^2 + 8x \geq 2x^3 + 2x$

$$x^3 - 2x^2 - 3x < 0$$

$$x(x-3)(x+1) < 0$$



$$x \in (0; 3)$$

$$x \geq 0$$

сл 2 $x < 0$ $4x^2 + 8x \geq -2x^3 - 2x$

$$x^3 + 2x^2 + 5x \geq 0$$

$$x((x+1)^2 + 4) > 0 \quad - \text{не добавляет при } x < 0$$

Значит, все решения (1) $\subset (0; 3)$

При $x \in (0; 3)$ $f(x) = 4(x+1)^2 - 4 = 4x^2 + 8x \nearrow$

Заметим, что $f(0) = 0 = g(0)$

~~Если оба множителя на $(0; 3)$ разрываются с нулем~~

~~значит, то тоже а не уходит, т.е. r~~

(2):

$$4x^2 + 8x > |4x^2 + 2a|$$

Условие

09

$$\left. \begin{array}{l} 4x^2 + 8x > 4x^2 + 2a \\ 4x^2 + 8x > -4x^2 - 2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} x > a/4 \\ 8x^2 + 8x > -2a \end{array}$$

~~Решение в общем виде.~~

$$\begin{array}{l} \text{Вам } a > x(x-1)^2 \\ a > -x(x+1)^2 \rightarrow +0 \end{array}$$

Заметим, что $|A| + |B| = |A+B|$ при $AB \geq 0$.

то есть $x^2(x-1)^2(x+1)^2 - a^2 \geq 0$.

$$|x(x-1)(x+1)| \geq |a|.$$

$|A| + |B| = |A-B|$ при $AB \leq 0$, т.е. при $|x(x-1)(x+1)| \leq |a|$.

