



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Генералов Алексей Сергеевич**

Класс: **7-8**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Генералов Алексей Сергеевич

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	5 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

№1.

Рассмотрим количество бананов. Человек, собравший больше всех б. (а такой найдётся — по усл. у всех разные кол-ва), точно рыцарь (нет 6-ти, собравших больше б.) Аналогично со вторым по количеству собранным б. (больше него собрал только первый $\Rightarrow$ 12 тоже рыцарь). Такие рассуждения можно применить к 6-ти людям, собравшим наибольшее кол-во б. Это 6 рыцарей. Следовательно все остальные — лжецы (хотя бы эти 6 рыцарей уже собрали больше них). Теперь рассмотрим кокосы. Собравший больше всего к: собрал. Предыдущие 7 человек тоже (больше них собрали от 0 до 6-ти чел., а не ≥ 7). Но все остальные точно скажут правду $\Rightarrow$ всего ровно 7 лжецов. Кроме лжецов и рыцарей никого нет, т.е. 7 лжецов и 6 рыцарей.

Ответ: 6 рыцарей и 7 лжецов

№2

Если бы все работники пришли во второй день и работали $\frac{1}{2}$ дня, то всего было бы 15 чр. Но пришло людей меньше $\Rightarrow$ и рядок < 15 . Если чр. 14, то 7 ч. во 2-й день, 7 ч. в 1-й. Если чр. 13, то 7 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 12, то 6 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 11, то 5 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 10, то 4 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 9, то 3 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 8, то 2 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 7, то 1 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 6, то 0 ч. во 2-й день, 6 ч. в 1-й. Если чр. 5, то 0 ч. во 2-й день, 5 ч. в 1-й. Если чр. 4, то 0 ч. во 2-й день, 4 ч. в 1-й. Если чр. 3, то 0 ч. во 2-й день, 3 ч. в 1-й. Если чр. 2, то 0 ч. во 2-й день, 2 ч. в 1-й. Если чр. 1, то 0 ч. во 2-й день, 1 ч. в 1-й. Если чр. 0, то 0 ч. во 2-й день, 0 ч. в 1-й.

Составим пропорцию: $\frac{x}{7} = \frac{10}{n \cdot 2}$, где x — кол-во р. всего, 7 — кол-во р. во 2-й день, 10 — кол-во чр. в 1-й день, $2n$ — кол-во чр., которое было бы выкопано за 2 полных дня. Она соблюдается, т.к. во сколько раз уменьшилось кол-во р., во столько и кол-во чр. (их производимость не менялась). При этом $x \in \mathbb{Z}$ (люди целые). Получаются следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 1) \frac{x}{7} &= \frac{10}{4 \cdot 2}; x = \frac{70}{8} \notin \mathbb{Z} & 3) \frac{x}{7} &= \frac{10}{2 \cdot 2}; x = \frac{70}{4} \notin \mathbb{Z} \\
 2) \frac{x}{7} &= \frac{10}{3 \cdot 2}; x = \frac{70}{6} \notin \mathbb{Z} & 4) \frac{x}{7} &= \frac{10}{1 \cdot 2}; x = \frac{70}{2} = 35 \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Ж.е. всего было 35р. и $10+n=10+1=11$ урядов.

Ответ: 11 урядов.

№3.

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b-c)$$

По усл. $9(b-c) : 72$. Тогда $72 = 9 \cdot 8$, $9 : 9 \Rightarrow (b-c) : 8$

Возможны след. варианты: $b_1=8; c_1=0; b_2=9; c_2=1$.

При этом $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ или 9. С каждым из

значений a сочетается по 2 значения: $b=8, c=0$ и $b=9, c=1 \Rightarrow$ всего таких чисел $9 \cdot 2 = 18$
↑ значения a $\leftarrow b_1, c_1$ или b_2, c_2

Ответ: 18.

№4.

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = 100$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y = 100$$

$$x + 3y = 100 - x^2 - 2xy - y^2$$

$$x + 3y = 100 - (x+y)^2$$

$$x + 3y = (10 - x - y)(10 + x + y)$$

По усл. $x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 3y \in \mathbb{N} \Rightarrow (10 - x - y)(10 + x + y) \in \mathbb{N}; a$

т.к. $(10 + x + y) \in \mathbb{N}$, то $(10 - x - y) \in \mathbb{N} \Rightarrow x < 10$ и $y < 10$ и

$x + y < 10$. Тогда возможные варианты $x + y = 9; x + y = 8 \dots$

$\dots x + y = 2$. Если $x + y < 10; x, y \in \mathbb{N}$, то $y \leq 8 \Rightarrow x + 3y \leq 25$.

С другой стороны, если $x + y \leq 8$, то $(10 - x - y) \geq 2$; а

$(10 + x + y) \geq 12$. При этом $y \leq 7$, а $x + 3y \leq 23$. Противо-

речие, т.к. $12 \cdot 2 = 24 > 23 \Rightarrow x + y = 9$. Тогда $(10 - x - y) =$

$= 1; (10 + x + y) = 19 \Rightarrow x + 3y = 19 \Rightarrow y = 5; x = 4$.

Ответ: $x = 4; y = 5$.

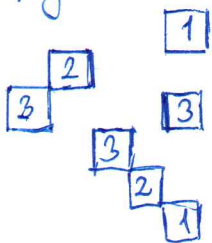
3/

Чистовик

N5

Может ли сверху быть видно < 7-ми кубиков?

Если да, то все башни, видимые спереди, должны быть видны и сбоку. Башнями условимся называть несколько кубиков, стоящих друг на друге и ещё не больше одной башни видно сбоку, но не видно спереди. Однако сбоку есть две башни с одним кубиком, которые спереди не видно. Т.е. минимум 2 башни видно сбоку, но не спереди $\Rightarrow$ всего башен минимум 4. При этом, раз башни вертикальные, сверху видно по одному кубику с каждой. Снизу пример — вид сверху, причём на каждом кубике обозначено число кубиков в башне, считая сам этот кубик:



N6

С Талател-3* можно за 1 пр. попасть в 40 пл. Если среди них нет планет, идём дальше. Порталы в этой группе из 40 пл. могут вести в худшем случае „внутрь“ этой группы (в планеты этой же группы). Тогда внутри максимум $\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$ порт. Но всего из каждой планеты выходит по 40 порт., всего из этой группы $40 \cdot 40 = 1600$. Тогда точно есть планета из которой выходит вне группы $\frac{1600 - 780}{40} = 23$ порт. В эту группу попадаем за 2 прыжка. Аналогичные рассуждения: $\frac{23 \cdot 40}{2} = 253$ порт.; $23 \cdot 40 = 920$ порт.; $\frac{920 - 253}{23} = 29$ пл. В эти попадаем за 3 прыжка. Пока мы посчитали $1 + 40 + 28 + 29 = 98$. Осталось 2 пл., далее: $\frac{29 \cdot 28}{2} = 406$ порт.; $29 \cdot 40 = 1160$; $\frac{1160 - 406}{29} > 2$, т.е. за 4 прыжка мы попадём и в эти 2 пл.

Ответ: 1, 2, 3 или 4 прыжка.

2184

Чепковик

$$(x+y)(x+y+1)+2y=100$$

$$x^2+xy+x+xy+y^2+y+2y+100=0$$

$$x^2+2xy+y^2+x+3y-100=0$$

$$(x+y)^2+x+3y-100=0$$

$$(x+y)^2-100+x+3y=0$$

$$(x+y-10)(x+y+10)+x+3y=0$$

$$x+3y=100-x^2-2xy-y^2$$

$$x+3y=100-(x+y)^2$$

$$x+3y=(10-x-y)(10+x+y)$$

$$x+y=9 \quad - \quad y=5 \quad x=4$$

$$x+y=8 \quad -$$

$$x+y=2$$

$$\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$$

$$40 \cdot 40 = 1600$$

$$23 \cdot 40 = 920$$

$$\frac{23 \cdot 22}{2} = 253$$

$$\frac{920 \cdot 40}{120} = \frac{920}{3}$$

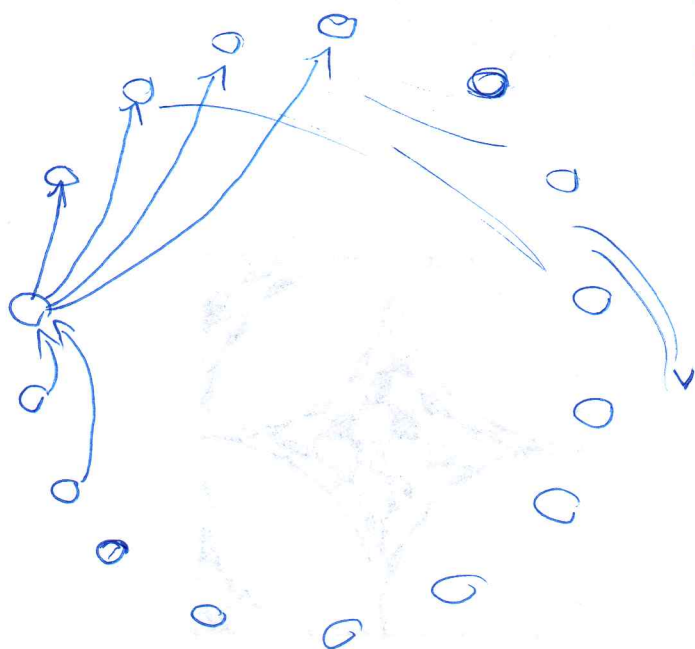
36

$$\frac{920}{3} = 306 \frac{2}{3}$$

23

$$\frac{667 \cdot 23}{2} = 7670 \frac{1}{2}$$

111



1 2 3 4 5 6 7 8

1 2 3 4 5 6 7

8: x x x p p p p p

2: p p u u u u u u

6p. n. 12.

725

5/

52



$$= \frac{ac - ab}{bc - cb}$$

$$22 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$$

$$\frac{bc}{b^2 - c^2} = \frac{0}{0}$$

$$:72 \Rightarrow b - c = 8$$

$$b=8, \quad c=0,$$

$$1000 + 100 + c - 1000$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times 29 \\ \hline 999 \\ 2220 \\ \hline 3231 \end{array}$$

3

$$\begin{array}{r} 920 \\ -253 \\ \hline 667 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 207 \\ 46 \overline{) 674} \\ \underline{62} \\ 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 406 \\ \times 29 \\ \hline 3654 \\ 7312 \\ \hline 11774 \end{array}$$

$$\frac{10}{x} = \frac{1.2}{x}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{4.2}$$

$$\frac{g}{\sigma^2} = x$$

$$\frac{10}{2} = 5$$

112.

N⁴

$$(x+y)(x+y+1) + 2y = 100$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y = 100$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 3y = 100$$

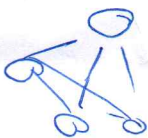
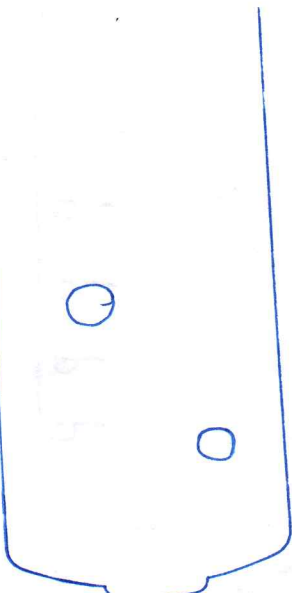
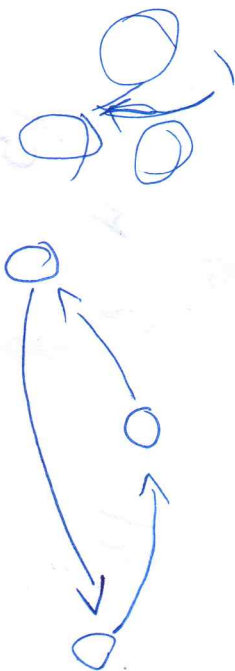
$$(x+y)^2 + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + y + 2y = 100$$

$$(x+y)(x+y+x+y) + 2y = 100$$

$$\begin{array}{r} 402 \\ - 420 \\ \hline \end{array}$$

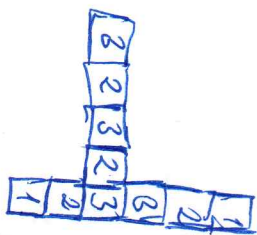
Умножение



$$\frac{39 \cdot 40}{2} = 780$$

$$\frac{40 \cdot 40}{2} = 800$$

59



9

