



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гусев Арсений Вячеславович**

Класс: **5-6**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Гусев Арсений Вячеславович

Класс: 5-6

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	5 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Черновик

(N1)

По башням: $B_1 < B_2 < \dots < B_n$

По кокосам: $C_1 < C_2 < \dots < C_n$

брызгарей

Башням: $B_1 < B_2 < \dots < B_{n-8} < B_{n-7} < B_{n-6} < B_{n-5} < B_{n-4} < B_{n-3} < B_{n-2} < B_{n-1} < B_n$

Кокосам: $C_1 < C_2 < C_3 < \dots < C_{n-6} < C_{n-5} < C_{n-4} < C_{n-3} < C_{n-2} < C_{n-1} < C_n$

$$\begin{cases} n-7=6 \\ n-6=7 \end{cases} \Rightarrow n=13$$

Пример:

Рнч.

N° чл(i)=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$B_i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$C_i =$	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(N2)

03.07.2030

(N3)

$$3a \cdot 8z \cdot \frac{3}{4}m \quad 2z = \frac{1}{2}m + \frac{3}{4}f + x$$

$$f \rightarrow 3a \cdot 17$$

$$\frac{3}{4}f \rightarrow 3a \cdot \frac{3}{4}z = 45'$$

$$\frac{5}{4}z = 3a \cdot 12.15' : \frac{1}{2}m + x$$

лнч 1 138

Черновики

(N3)

$x; f; m$ - время (в часах)

Сумма работы за 1 час

$$\begin{cases} x = 0,25n = \frac{n}{4} f \\ f = 1 \\ m = n - \frac{n}{4} - 1 = \frac{3n}{4} - 1 = \frac{3n-4}{4} \end{cases}$$

(n-?)

$$\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}f + x = 2$$

$$\frac{3n-4}{8} + \frac{3}{4} + \frac{n}{4} = 2 \quad | \cdot 8$$

$$3n-4 + 6 + 2n = 16$$

$$5n + 2 = 16$$

$$5n = 14$$

$$n = 2,8$$

Хорошая идея:

$$\begin{cases} x + f + m = n \\ x = \frac{n}{4} \\ f = 1 \\ m = \frac{3n-4}{4} \\ \frac{1}{2}m + \frac{3}{4}f + x = 2 \end{cases}$$

(N4)

$$\overline{abc} - \overline{acb} = (100a + 10b + c) - (100a + 10c + b) = 10b + c - 10c - b = 9b - 9c = 9(b-c)$$

$$9(b-c) \stackrel{(!)}{=} 72$$

$$(b-c) \stackrel{(!)}{=} 8$$

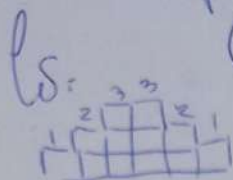
$$\begin{cases} b=c \rightarrow 108 \\ b=8; c=0 \rightarrow 18 \\ b=9; c=1 \rightarrow 18 \end{cases} \quad \left| \sum_{bc} = 128 \right.$$

$$\sum = \sum_a * \sum_{bc} \quad \left| \sum = 9 * 12 = 108 \right.$$

W

Лиса Луиза

Черновики

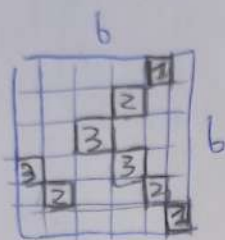
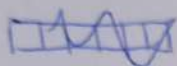


(N5)

$\omega_{\min} = ?$

будет 3 багетов по 3
2 багетов по 2
2 багетов по 1

[8]



(N6)

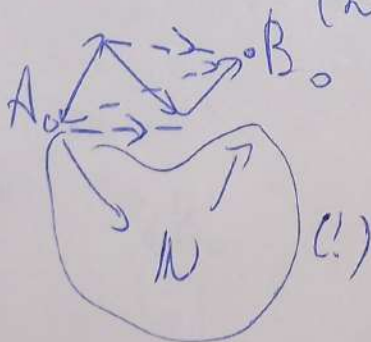
Ориент-граф (100 верш), ет. каждой = $40 + 40$

A.

B.

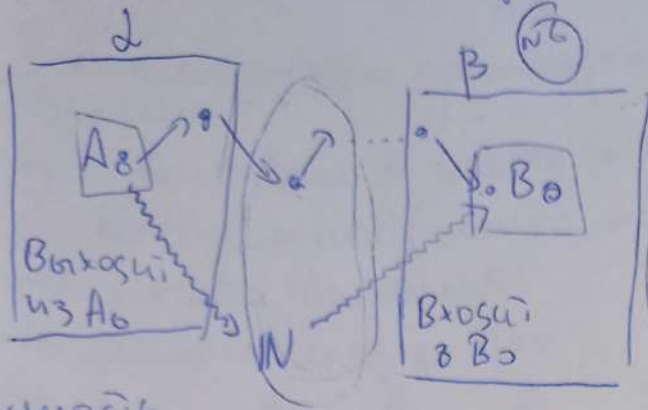
Рассмотрим самый длинный путь:
Путь от A до B

(Для $A_0 \rightarrow B_0$ это оптимально)



лист 3 и 38

Черновик



ты же $L \times B$ ($L \cap B = \emptyset$)

Важно:

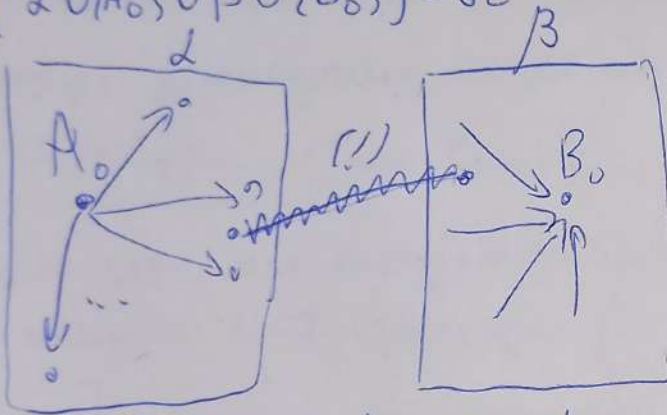
$\{A_0\} \subset L$
 $\{B_0\} \subset B$

$\{C(\varphi) \rightarrow \text{кол-во элементов в } \varphi\}$

мощности

$$\begin{cases} C(L) = 40 \\ C(B) = 40 \end{cases} \Rightarrow \Sigma = 80$$

$$C(L \cup A_0 \cup B \cup B_0) = 82$$



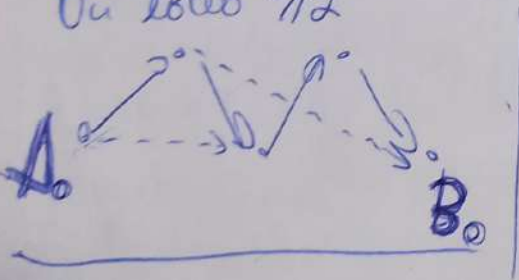
Хотим доказать, что обязательно есть ребро из ~~A_0~~ L в B



Все эти пути из A_i в B_i . Ты же та же из A_0 в B_0 .

Чему он н.б. равен?

Он равно $\pi/2$



[1]

из A_0 ^{ровно} за 2 перехода только выйдешь из L .

уже в B

еще не в B

не в B_0

в B_0

[2]

[2]

Мит 6 и 3

Числовик

№1

Система забудет про кокасы и будем смотреть на дешиши.

Пусть было n человек и человек с номером i собрал v_i дешишов (номера могут даются по возрастанию количества дешишов).

Получилось следующее:

$$v_1 < v_2 < \dots < v_{n-5} < v_{n-4} < v_{n-3} < v_{n-2} < v_{n-1} < v_n$$

Очевидно, что рыцари могут быть только последние 6 человек, остальные $(n-6)$ - лжецы.

Теперь упорядочим людей по кокасам (i -й собрал c_i кок.):

$$c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_{n-6} < c_{n-5} < c_{n-4} < c_{n-3} < c_{n-2} < c_{n-1} < c_n$$

Здесь лжецы могут быть только последние 7, остальные $n-7$ - рыцари.

Эти 2 раза мы рассматривали одних и тех же людей $\Rightarrow$ к-во лжецов и рыцарей в системе и потом одинаково.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} n-7 \geq 6 \text{ (рыц)} \\ n-6 \leq 7 \text{ (лж)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \geq 13 \\ n \leq 13 \end{cases} \Rightarrow n=13 \Rightarrow \begin{matrix} \text{рыцарей} - 6 \\ \text{лжецов} - 7 \end{matrix}$$

Значит, условие выполняется только если есть 6 рыцарей и 7 лжецов. Приведем пример:

N_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
v_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
c_i	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

лжецы
рыцари

Ответ:

6 рыцарей
7 лжецов

Лист 5 из 8

Цисловик

№ 2

Очевидно, что в гате-палиндроме 2 последние цифры года - это "перевёрнутое" число.

Года с 2023 по 2029 тоже не подойдут (так как не существует гат 32; 42; ...; 92), а вот 2030 год может подойти.

Понятно, что по году гате-палиндрома можно однозначно определить число и месяц, где 2030 года это 03.02. Это и будет ближайшим палиндромом.

Ответ: 03.02.2030

№ 3

Пусть он тратит m часов на математику; f - на физику; x - на химию. На все уроки потратит n часов. Запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} m + f + x = n \\ x = 0,25n = \frac{n}{4} \\ f = 1 \\ m = n - \frac{n}{4} - 1 = \frac{3n}{4} - 1 = \frac{3n-4}{4} \\ \frac{1}{2}m + \frac{3}{4}f + x = 2 \end{cases}$$

(Четвертое ур-е получилось из трех первых)

Подставим 4 первых ур-я в последнее:

$$\frac{3n-4}{4} + \frac{3}{4} + \frac{n}{4} = 2 \quad | \cdot 4$$

$$3n-4+3+n=8$$

$$5n+2=10$$

$$n = \frac{14}{5} = 2,8 \text{ (часа)} \text{ он сделал все уроки.}$$

Ответ: за 2,8 часа

Лий 6 из 8

Задача N4

$$\begin{cases} \overline{abc} = 100a + 10b + c \\ \overline{acb} = 100a + 10c + b \end{cases}$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 10b + c - 10c - b = 9(b - c)$$

если $9(b - c) \div 72$, то $b - c \div 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = c \rightarrow 10 \text{ вар-тов} \\ c = 8; b = 0 \rightarrow 2 \text{ вар-та} \\ b = 8; c = 0 \rightarrow 2 \text{ вар-та} \\ c = 9; b = 1 \rightarrow 2 \text{ вар-та} \\ b = 9; c = 1 \rightarrow 2 \text{ вар-та} \end{array} \right\} \Rightarrow 14 \text{ вар-тов}$$

К каждому из 14 вариантов постановки цифр b и c соответствует любая из 9 вариантов постановки цифр a .

Значит, всего $14 \cdot 9 = 126$ вариантов

Ответ: 126

N5

Ответ: 8

Решение:

Как бы мы ни ставили кубики, всё равно придётся сделать $7/3$ башенки из 3 кубиков, $7/2$ башенки из 2 кубиков и $7/2$ башенки из 1 кубика, значит, всего $7/8$ башенок $\Rightarrow 7/8$ кубиков в виде сверху.

Пример:

			1
		2	
	3		
3		3	
2			2
			1

↑
переза

Изображен вид сверху, циферки 1, 2 или 3 - это кол-во кубиков в башенке, которая стоит на месте соответствующей циферки

Или 7 из 8

Чистовик

№6

Переформулируем условие задачи.

Существует ориентированный граф на 40 вершинах, в каждую вершину входит 40 ребер и выходит 40 ребер.

Нужно ~~показать~~ понять, сколько ребер можно пройти, чтобы попасть из вершины A в B (A и B - произв. вершины).

Очевидно, что данный граф эвлеров (т.е. из любой вершины можно попасть в любую другую).

Выберем 2 вершины A_0 и B_0 , хотим добраться из A_0 в B_0 . Пусть L - множество вершин ~~и тех, до которых~~ и тех, к которым идут ребра от A_0 .

R - множество B_0 и вершин, от которых ребра идут в B_0 .

Может так случиться, что $B_0 \in L$ или $A_0 \in R$. Тогда из A_0 в B_0 можно добраться по одному ребру.

Пусть $L \cap R = \emptyset$. Если $\emptyset$ - не пустое множество, то из A_0 в B_0 можно добраться по 2 ребрам.

Если же $\emptyset = \emptyset$, то ~~тогда~~ пройдем по 2 ребрам от A_0 , мы тогда выйдем из L . Если мы попадем сразу в B_0 , то добрались за 2 ~~хода~~ хода, если в R но не в B_0 - то за 3.

Если же мы пройдем по 3 ребрам, выйдем из L и не попадем в R , то поскольку мы выбираем оптимальный путь, следующим шагом можно будет прыгнуть в R (иначе выберем сразу вершину вне L), когда мы будем в R , или мы сразу будем в B_0 (3 хода), или еще пройдемся по одному ребру, чтобы попасть в B_0 (4 хода).

Ответ: 1; 2; 3 или 4 хода

Лист 8 из 8