



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Львова Алеся Яновна**

Класс: **7-8**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Львова Алеся Яновна

Класс: 7-8

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	5 баллов	85 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Задача 1

Бананы:

Если утверждение говорит рыцарь, то это правда, значит больше одного рыцаря, который набрал n и.б. ещё 5 жителей ($n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$)

Эти жители тоже рыцари. Всего 6.

$n-1$ и т.д. набрали лжецы

Кокосы:

Если это говорит лжец, то нет 7 жителей, набравших больше кокосов, чем он, значит их 6 и они лжецы. Всего 7 лжецов

Итого 6 рыцарей и 7 лжецов.

Задача 2

Пусть всего кол-во градов k , где k — целое,
 n — кол-во всего рабочих, x — производительность каждого
 рабочего в день. Тогда:

1 день:

$$n \cdot x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{n}$$

2 день:

$$7 \cdot x = k \cdot 10 \rightarrow x = \frac{k-10}{7}$$

$$\frac{10}{n} = \frac{k-10}{7}$$

$$70 = n \cdot k - 10n$$

$$k = \frac{70 + 10n}{n} = \frac{70}{n} + 10$$

$\frac{70}{n}$ должно быть целым $\rightarrow n = 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70$

Заметим, что во 2 день градов вскопано меньше 5, т.к.
 работали пол дня и были заболевшие $\rightarrow$

$$\rightarrow k - 10 < 5$$

С учётом этого ограничения нам подходят $n = 35$ и $70 \rightarrow$

$$\rightarrow k_1 = 12$$

$$k_2 = 11$$

Ответ: $k = 12$; $k = 11$.

Чистовик Задача 3

$$\overline{abc} - \overline{acb} : 72$$

↓

$$\overline{bc} - \overline{cb} : 72 (*)$$

у а - 9 вариантов (все цифры, кроме 0)

~~abc~~ (*):

$$b \cdot 10 + c - c \cdot 10 - b : 72$$

$$9b - 9c : 72$$

↓

$$b - c : 8$$

Максимальная разность получается при максимальном b и минимальном c . Максимальное $b=9$, минимальное $c=0$

$$b - c = 9 - 0 = 9$$

$$b - c \leq 9$$

Т.к. $b - c : 8$ и $b - c \leq 9$, то есть 2 варианта:

$$1) b - c = 8$$

$$b = c + 8$$

↓

Максимальное $c=1$,
т.к. b - однозначное

↓

$$c = 1; 0$$

$$b = 9; 8$$

Кол-во комбинаций:

$$9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

$$2) b - c = 0$$

$$b = c$$

10 вариантов (все однозначные)

Кол-во комбинаций

$$9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$$

Итого получаем $36 + 90 = 126$ вариантов.

Чистовик

Задача 4

Обозначим $x+y$ за n . Тогда:

$$n \cdot (n+1) + 2y = 100$$

$n \cdot (n+1)$ — произведение последовательных чисел

Такие произведения должны быть ≤ 100

$$n = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9$$

С другой стороны $1 \leq y \leq n-1$, т.к. $x \geq 1$

Кроме того, можно заметить, что при раскрытии скобок первое выражение это квадрат $(x+y)$

Ближайший к 100 квадрат это $9 \times 9 = 81$.

$$x+y=9 \rightarrow 9 \cdot 10 + 2y = 100$$

$$y=5$$

$$x=4$$

Если квадрат $8 \times 8 = 64$

$$\rightarrow x+y=8 \quad 8 \cdot 9 + 2y = 100$$

$$72 + 2y = 100$$

$$y=14 \quad \ominus$$

Ответ: $x=4; y=5$.

Задача 5

Верхний ряд:

минимально 3

Средний ряд:

минимально 5

Нижний ряд:

минимально 7

Итого 15 кубиков

Вид сверху:

		X		
	X			
		X		
X				X
			X	
		X		

Тогда сверху видно 7 кубиков.

Чистовик

Задача 6

~~Если Пандора находится~~

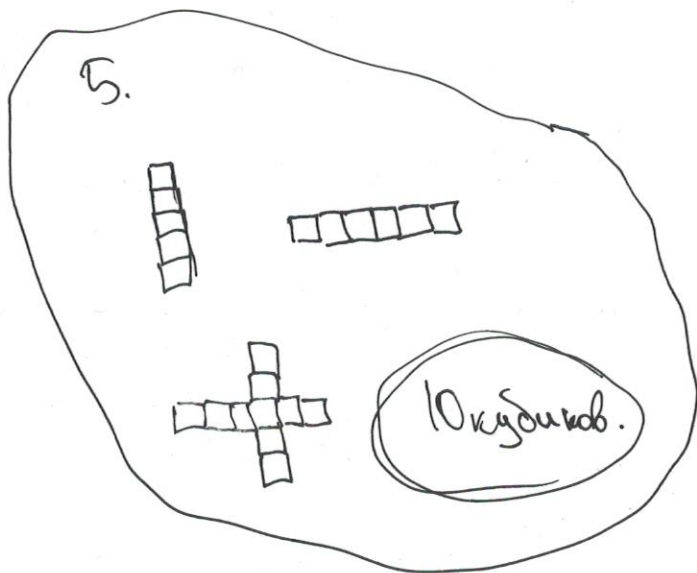
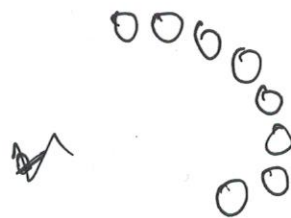
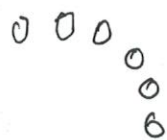
Если с Галатеей - 73 есть портал на Пандору, то требуется 1 прыжок. Таких вариантов, "расположения" Пандоры 40.

Далее 40 вариантов, где Мистер Риггз минимально добирается за 2 прыжка. Остается $100 - 1 - 40 - 40 = 19$ вариантов, расположения Пандоры, где Мистер Риггз добирается за 3 прыжка

Ответ: 1, 2 или 3.

Багача.

~Черновик~



$$x(x+1) = 100$$

$$x^2 + x = 100$$

$$x^2 + x - 100 = 0$$

$$D = 1 + 400 = 401$$

~~10~~

4.

x, y

$$(x+y) \cdot (x+y+1) + 2y = 100$$

$$x^2 + xy + xy + y^2 + x + y + 2y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 2y = 100$$

$$x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + y + 2y = 100$$

$$(x+y)^2 + x + 3y = 100$$

$$(x+y)(x+y+1) = 2(50-y)$$

$$y \neq 50$$

$$x^2 + 101x = -2550$$

$$D = 101^2 - 4 \cdot 2550 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-101 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{-101-1}{2} = -51 \\ \frac{-101+1}{2} = -50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+50=0 \\ x+50+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-50 \\ x=-51 \end{cases} \Rightarrow (x+50)(x+50+1) = 0$$

$$x^2 + 101x + 2550 = 0$$

Черновик

Задача 2.

Пусть всего количество графов k , где k - целое,
 n - количество всего рабочих, x - производительность каждого рабочего
 в день

Тогда

$$\begin{aligned} \text{1 день} \quad n \cdot x &= 10 & \Rightarrow x &= \frac{10}{n} \\ \text{2 день} \quad 7 \cdot x &= k \cdot 10 & \Rightarrow x &= \frac{k \cdot 10}{7} \end{aligned}$$

$$\frac{10}{n} = \frac{k \cdot 10}{7}$$

$$70 = n \cdot k - 10n$$

$$k = \frac{70 + 10n}{n} = \frac{70}{n} + 10$$

$$\frac{70}{n} \text{ должно быть целым} \Rightarrow n = 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70$$

Заметим, что во 2 день графов включено
 меньше 5, т.к. работали пол дня
 и были задержившие

$$\Rightarrow k - 10 < 5$$

С учетом этого ограничения нам
 подходят $n < 35$ и 70

$$\Rightarrow k_1 = 12$$

$$k_2 = 11$$

Задача 3

$$\overline{abc} - \overline{acb} : 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{bc} - \overline{cb} : 72$$

а - 9 вариантов (все цифры кроме 0)

Подходит вариант, когда $b=c \Rightarrow 0, 1, \dots, 9$
 10 вариантов

и варианты:

$\overline{bc}$	$\overline{cb}$
08	80
19	91
80	08
91	19

Всего 4 варианта

$$\text{Итого } 14 \cdot 9 = 126 \text{ вар.}$$

Черновик

	К	Б	Р	Л
1	1	27	✓	х
2	2	1	х	✓
3	3	2	х	✓
4	4	3	х	✓
5	5	4	х	✓
6	6	5	х	✓
7	7	6	х	✓
8	8	7	х	✓

8: 1Р

(1)

$$7+6+5+4+3+2=10+10+7=27$$

Максимум 5 жителей
собирали бананов больше,
чем а.

abc (3)

$$abc - acb: 72$$

$$100a + 10b + c - 100c - 10a - b: 72$$

$$9b - 9c: 72$$

$$b - c: 8$$

$$9b - 9c: 72$$

$$b - c: 8$$

⇓

а - любая цифра,
кроме 0

b=c - 10 вариантов

b>c:

$$b - c: 8$$

Всего

$$b - c \leq 9, \text{ т.к.}$$

Максимальная
разность получается
при максимальном
b и минимальном
c. Максимальное b - 9

13 жителей:

7 лжецов
6 рыцарей

$$\frac{18}{2} = 9$$

126 вар.

$$a \cdot 10 = 90 \text{ вар.}$$

$$9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

$$9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$$

Посчитаем
кол-во
вариантов.

$$b=9, c=1$$

$$b=8, c=0$$

2 варианта

6 рыцарей (кол-во бананов
идёт по возрастанию)
Если 7 то у 1 будет
6 рыцарей людей, у которых
бананов больше

7 лжецов (кол-во кокосов
по убыванию)

Если 8, то у 1 лжеца
будет 7 людей, у которых кокосов
больше и он скажет правду.

$$b = c + 8$$

Макс. разность
c=1, т.к.

$$b - c: 8$$

$$b - c \leq 9$$

то есть 2 варианта:

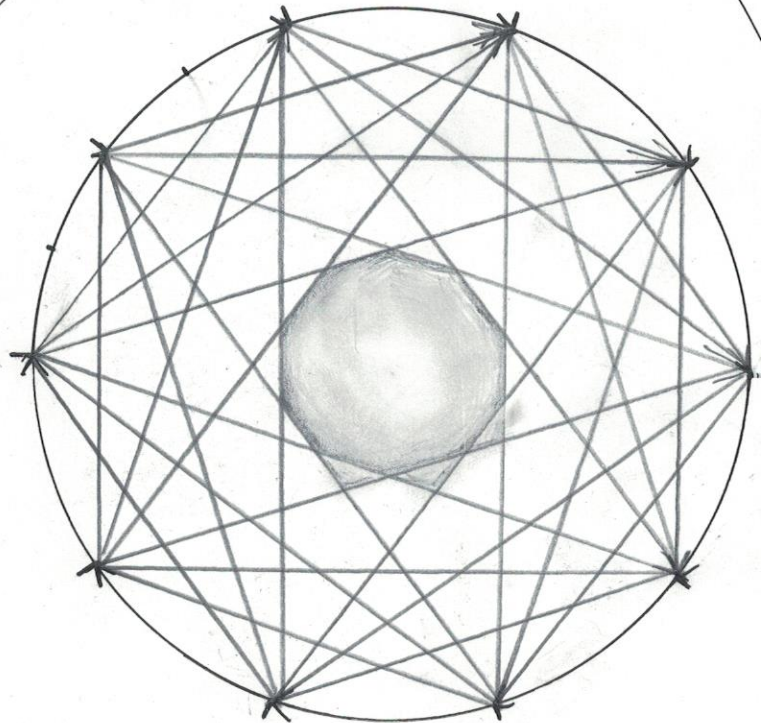
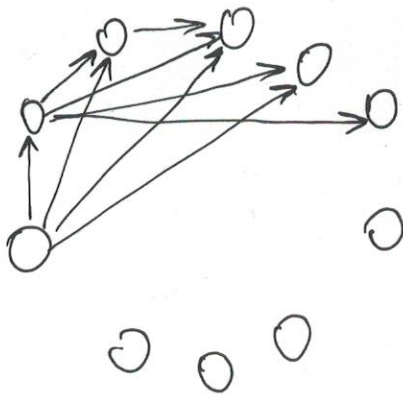
$$b - c = 0$$

$$b - c \leq 9$$

$$b - c = 8$$

$$b - c = 0$$

Черновик



до ч. планет у него есть силовые порталы
до следующих 5 каждый раз путь будет увеличиваться
на 1 портал: 2п., 3п., 4п., 5п., 6п.
Всего т.е. есть 6 вариантов сколько прыжков ему
потребуется: 1, 2, 3, 4, 5, 6.