



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кириллов Андрей Александрович**

Класс: **9**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Кириллов Андрей Александрович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	10 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

№ 1

Пусть n - кол-во забравших работников ($n \in \mathbb{N}$);
 v - производительность 1 работника (урадок в день);
~~пусть~~ x - общее кол-во урядок (одинаковых)

Тогда по условию:

$$\begin{cases} 10 = (n+7) \cdot v \Leftrightarrow v = \frac{10}{n+7} \\ x-10 = 7 \cdot \frac{v}{2} \text{ (пандня)} \Leftrightarrow 2x-20 = 7v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-20 = \frac{70}{n+7} \\ (x-10)(n+7) = 35 \end{cases}$$

1, 5, 7, 35 - все делители числа 35.

8 $\text{Из } n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+7 \geq 8 \Rightarrow \begin{matrix} n \geq 1 \Rightarrow \\ (1 < 8; 5 < 8; 7 < 8) \end{matrix} n+7 = 35 \text{ (т.к. } (x-10) \in \mathbb{N};$

$(n+7) \in \mathbb{N}; 35 \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow n = 28 \text{ (забравших рабочих)}$

Отсюда $x-10 = 1 \Leftrightarrow \underline{x = 11}$ (урядок)

Действительно, тогда $v = \frac{10}{28+7} = \frac{2}{7}$ (урядки в день).

Изначально всего рабочих было $28+7=35$.

Тогда $10 = 35 \cdot \frac{2}{7}$ (верно)

Из II день каждый выкопал $\frac{1}{7}$ урядки (т.к. работая пандня). Тогда $11-10=1=7 \cdot \frac{1}{7}$ (верно)

~~Проверка~~ Проверка сделана.

Ответ: на подсобном участке было 11 урядок

Черновик

2.5.88

44.45+1

$$x^2 + 11x + 2022 = 0$$

$$D = d^2 = 8088$$

$$8089 = 109$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$68 \cdot 128$$

$$8089 = 7 \cdot (1000 + 100 + 50 + 1)$$

$$8089 = 11 \cdot (700 + 39)$$

$$13 \cdot (600 + 20)$$

$$17 \cdot (400 + 70)$$

$$8089 \cdot 17$$

$$(x+2k)(x+2k+1) + 2k = 2022$$

$$x^2 + 4kx + 4k^2x + 4k = 2022$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ +89 \\ \hline 178 \\ 1780 \\ \hline 1658 \end{array} \quad x(x+1)$$

$$8100 - 180 + 1$$

$$7921$$

$$x(x+4k+1) \equiv 2$$

$$x(x+1) \equiv 4$$

$$D = (2y+1)^2 - (4y^2 + 8y - 8088) =$$

$$= -4y + 8089$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7921 \\ \hline 168 \end{array} \quad x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022$$

$$y = 42 \quad y(2x+y+1) = 2022 - x^2 - x = -y + \frac{\sqrt{8089-4y}-1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 7740 \quad 7744 \\ 8100 - 360 + 4 \\ \hline 7744 \end{array} \quad x^2 + x(2y+1) + y^2 + x + 2y = 2022$$

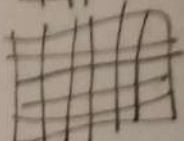
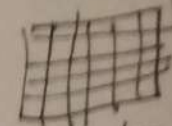
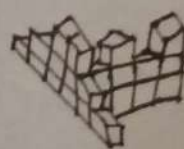
$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7744 \\ \hline 345 \end{array} \quad D = (2y+1)^2 - 4y^2 - 4y = 8089$$

$$x = \frac{-2y-1 \pm \sqrt{8089}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7561 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$132$$

$$\begin{array}{r} 7549 \\ 8089 - 540 + 1 \\ \hline 7550 \end{array}$$



0	3	0
0	2	0
0	3	0
0	2	0
1	2	1

стр. 10

ЧИСЛОВИК

Стр. 2

№ 2

$\overline{abc}$ - трёхзначное число $\Rightarrow a \in [1; 9]$ ($a \in \mathbb{N}$).

$$(\overline{abc} - \overline{acb}) : 72 \Rightarrow \overline{abc} \equiv \overline{acb} \Leftrightarrow 100 \cdot \overset{0}{a} + \overset{9b}{10} + \overset{0}{c} \equiv \overset{0}{a} + \overset{9c}{10} + \overset{0}{b} \pmod{72}$$
$$\equiv 100 \cdot \overset{0}{a} + \overset{10}{10} + \overset{9c}{10} + \overset{0}{0} \Leftrightarrow 9b \equiv 9c \pmod{72} \Leftrightarrow 9(b-c) : 72.$$

Но $72 = 9 \cdot 8$; $\text{НОД}(9, 8) = 1 \Rightarrow (b-c) : 8 \Rightarrow b \equiv c \pmod{8}$

Но $b \in [0; 9]$ и $c \in [0; 9] \Rightarrow$ подходят пары

b и c : $(0; 0); (0; 8); (8; 0); (1; 1); (1; 9); (9; 1); (2; 2); (3; 3);$
 $(4; 4); (5; 5); (6; 6); (7; 7); (8; 8); (9; 9)$ (14 пар).

Разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ может быть нулевой, положительной или отрицательной. Не обязательно все цифры a, b, c различны.

Таким образом, всего существует $14 \cdot 9 = \underline{126}$

трёхзначных чисел $(a; b; c)$, для которых $(\overline{abc} - \overline{acb}) : 72$.

Как раз столько и будет чисел трёхзначных $a b c$.

Ответ: 126 чисел

ЧИСТОВИК

Смп. 3

№3

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y+1)+y &= 2022 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = \\ &= 2022 \Leftrightarrow x^2 + x(2y+1) + (y^2 + 2y - 2022) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow D &= (2y+1)^2 - 4(y^2 + 2y - 2022) = (4y^2 + 4y + 1) - \\ &- (4y^2 + 8y - 8088) = 8089 - 4y.\end{aligned}$$

При этом $D \geq 0$, тогда был ж.д.1 корень x :

$$x = \frac{-(2y+1) \pm \sqrt{8089-4y}}{2} = \text{н.к. } x \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq 1 > 0) \quad \frac{-(2y+1) + \sqrt{8089-4y}}{2} \quad (y \in \mathbb{N} \Rightarrow y \geq 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(2y+1) \leq -3 < 0) \quad \frac{-(2y+1) - \sqrt{8089-4y}}{2} = -y + \frac{\sqrt{8089-4y} - 1}{2}$$

Нужно найти такие $y \in \mathbb{N}$, при которых $8089 - 4y = k^2$ ($k \geq 2$). Тогда $x = \frac{k-1}{2} - y$.

$$\text{Но при этом } \frac{k-1}{2} \geq y+1 \Leftrightarrow k-1 \geq 2y+2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow k \geq 2y+3.$$

Заметим, что $y \leq 42$, иначе $y \geq 43$. А тогда

$$(x+y)(x+y+1)+y \geq (1+43)(1+43+1)+43 = 2023 > 2022 (\text{?}).$$

$$\text{Итак, } y \leq 42 \Rightarrow -4y \geq -168 \Rightarrow 8089-4y \geq 7921 = 89^2, \text{ т.е. } k \geq 89. \text{ Но } y \geq 1 \Rightarrow 8089-4y \leq 8085 < 8100 = 90^2 \Rightarrow$$

ЧИСТОВИК

Стр. 4

№3 (прод.)

$$\Rightarrow k=89, \text{ откуда } y = \frac{k^2 - 8089}{-4} = \frac{8089 - 768}{4} = \boxed{42}.$$

$$\text{Тогда } x = \frac{89-1}{2} - 42 = 44 - 42 = \boxed{2}.$$

Проверка:

$$2 \in \mathbb{N}; \quad 42 \in \mathbb{N}; \quad 89 > 2 \cdot 42 + 3;$$

$$(2 + 42)(2 + 42 + 1) + 42 = 2022 \text{ (верно)}$$

Ответ: $x=2$ и $y=42$ (маленько такая пара)

Чистовик

[Comp - 5]

№ 4

По виду спереди и сбоку можно сделать вывод,
что недостроенный замок располагается
на ~~прямой~~ клетчатой прямоугольнике 5×5 ,
где 5 - передняя сторона, а 5 - ~~боковая~~ боковая, при
этом ~~1 клетка - 1 м~~ основание

~~В~~ в 1 клетку помещается ровно 1 основание кубиков (но не обязательно на каждой клетке находится х.б. 1 кубик).

emp	1	2	3	4	5	6
5						
4						
3						
2						
1						

передняя
часть

Бюковая часть

По виду спереди, делаем
выводы:

в строке 1 имеется п.б.

1 сталь^{ик}~~ей~~ высоты, 3 кудухи

в строке 2 - х.д. 1 стандартных
высоты, 2 кубика

в строке 3 - к.б. 1 столбца их
высоты 3 кубика.

в строке 4-х.б. 1 столбик высоты в 2 кудриной

8 ступ^{ка}_{ке} 5 - ж.д. 1 стандарт высоты, Зиссука

Значит всего х.б. 2 столбика высоты $\frac{2}{3}$ кубика и х.б. 3 столбика высоты $\frac{1}{3}$ кубика.

По виду ссылаемся на ввод:

2 стрелы 1-х.д. 1 стандарт высоты 1 кубика
3 стрелы 2-х.д. 1 стандарт высоты 2 кубика

в ступенях 2-х.д. 1 ступень высоты 1 кубика
2 ступень высоты 2 кубика

ЧИСТОВИК

Стр. 6

№4 (труд.)

в стойке 3 - х.д. 1 столбик высоты 3 кубика
в стойке 4 - х.д. 1 столбик высоты 3 кубика
в стойке 5 - х.д. 1 столбик высоты 2 кубика
в стойке 6 - х.д. 1 столбик высоты 1 кубика

Значит всего х.д. 2 столбика высоты ^{кубик} 1, х.д. 2 столбика
высоты ^{кубика} 2 и х.д. 2 столбика высоты 3 кубика

Итак, всего х.д. 2 столбика высоты ^{кубик} 1, х.д. 2 ^{кубика}
столбика высоты ^{кубика} 2 и х.д. 3 столбика высоты 3 ^{кубика}

Таким образом, всего х.д. 7 столбиков, т.е.

на виде сверху может быть изображено

х.д. 7 кубиков.

Пример ситуации:

0	0	3	0	0	1
0	0	0	0	2	0
0	0	0	3	0	0
0	2	0	0	0	0
1	0	3	0	0	0

Боковая
сторона

передняя
сторона



- НЕ пустые стойки, а



- ПУСТЫЕ стойки.

~~на каждой стойке~~
На рис. слева показано

на рис. слева на каждой
клетке показано кол-во
кубиков, стоящих друг на
друге, т.е. высота данного
столбика. На рис. слева

Ответ: 7 кубиков

№ 5

$$x^2 + ax + 2022 = 0 \Rightarrow D = a^2 - 8088.$$

$D < 0$ при $a^2 < 8088$, т.е. при $a \in \mathbb{R}(-\sqrt{8088}; \sqrt{8088})$.

Но $a \in [0; 99]$ (по усл.) $\Rightarrow \sqrt{a} \in [0; 89]$ (т.к.

$89^2 = 7921 < 8088 < 8100 = 90^2$) $D < 0$, т.е. корней не будет

$D = 0$ при $a^2 = 8088$, т.е. при $a = \sqrt{8088} \in (89; 90)$ (ц.).

Значит $D \neq 0$ ни при каких a .

Итак, теперь рассмотрим все $a \in [90; 99]$.

Только при таких a Андрей будет получать действительные корни (по 2 корня на

каждое $a \in [90; 99]$, т.к. $D = a^2 - 8088 \geq 12 > 0$)

То м.б. для случаев с такими a : ~~$x_1 + x_2 = -a$~~

~~$x_1 + x_2 = -a$~~

Пусть $x_{1,i}$ и $x_{2,i}$ - корни, которые получаются при $a = i \in [90; 99]$. Тогда:

$$\begin{aligned} \sum x &= (x_{1,90} + x_{2,90}) + (x_{1,91} + x_{2,91}) + \dots + (x_{1,98} + x_{2,98}) + \\ &+ (x_{1,99} + x_{2,99}) = -90 - 91 - \dots - 98 - 99 = -(90 + 99) - \\ &- (91 + 98) - (92 + 97) - (93 + 96) - (94 + 95) = -5 \cdot 189 = \\ &= \boxed{-945} \end{aligned}$$

Ответ: -945

нет паритета при $i \in [1; 40]$; $j \in [1; 40]$.

№ 6

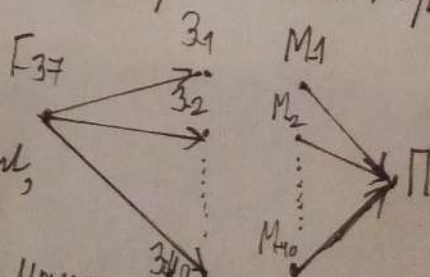
От каждой из 100 планет отходит ровно 40 порталов и входит ровно 40 порталов $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ всего ровно $40 \cdot 100 = 4000$ порталов.

Возможна ситуация, когда ОТ Галактики-37 идёт портал к Планете. В таком случае Мистеру Виллу потребуется ровно 1 прыжок.

Предположим, что от Галактики-37 к Планете нет портала. Пусть $\{Земля-1, Земля-2, \dots, Земля-40\}$ — те 40 планет, к ~~каждой~~ которым есть портал от Галактики-37. Если от Земли- i ($i \in [1; 40]$) ^{при каком-то i} идёт портал к Планете, то Мистеру Виллу потребуется ровно 2 прыжка.

Предположим, что ОТ Земли- i нет портала к Планете при $\forall i \in [1; 40]$. Пусть $\{Марс-1, Марс-2, \dots, Марс-40\}$ — те 40 планет, от которых есть портал к Планете. Если $\exists i \in [1; 40]; j \in [1; 40]$ такие, что ОТ Земли- i к Марсу- j идёт портал, то м.р. нужно ровно 3 прыжка.

Предположим, что от Земли- i к Марсу- j нет портала при $\forall i \in [1; 40]; j \in [1; 40]$.



Численные /

0.5.18

стр. 9

Черновик

X число

$$10 = n \cdot v \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$2x - 10 = 7 \cdot v$$

$$(a+b) - (a+b) : 72$$

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022 \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{N} \\ y \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

~~10 = 7 \cdot 1~~

$$(x-10) : 7$$

$$(2x-20) : 7$$

$$x \equiv 3 \pmod{10}$$

~~1000a + 100b + c \equiv 1000a + 100b + c \pmod{72}~~

$$1000a + 100b + c \equiv 1000a + 100b + c \pmod{72}$$

$$10 = n \cdot \frac{10}{n}$$

$$2x - 20 = 7 \cdot \frac{10}{n}$$

$$g \equiv g \pmod{72}$$

$$g(b-c) : 72$$

$$b \equiv c \pmod{8}$$

$$10 = 7$$

$$2x - 20 = 70$$

$$x \equiv 11$$

$$x - 10 = 35$$

$$(x-1) \cdot n = 35$$

$$35 \quad 1$$

$$(0;8); (8;0); (9;1); (1;9)$$

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022$$

$$(x+1)(x+2y)+y^2=2022$$

36 число

$$\boxed{\begin{aligned} 10 &= (7+n) \cdot \frac{10}{(7+n)} \\ 2x-10 &= 7 \cdot \frac{10}{7+n} \end{aligned}}$$

$$2x(7+n) = 7(x+10)$$

$$14x + 2xn = 7x + 70$$

$$x(7+2n) = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$12 = 24 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{12}{21} \cdot 21$$

$$(x+2k)(x+2k+1)+2k=2022$$