МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Клочков Иван Сергеевич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

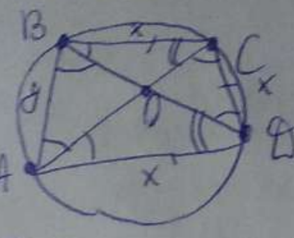
ФИО участника: Клочков Иван Сергеевич

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Тех. балл***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Чистовик 2.



№4

Пусть $BC = CD = AD = x$, $x, y \in \mathbb{N}$.
$AB = y$

1) По св-ву вписанных углов, опирающихся на равные хорды, $\angle BAC = \angle BDC = \angle CBD = \angle CAD = \angle ABD = \angle ACD = \alpha$.
$\angle BCA = \angle BDA = \beta$

2) По Т о сумме углов тр-ка в $\triangle BAD$: $3\alpha + \beta = 180^\circ$.

3) Т.к. $\angle BAD + \angle ADC = 3\alpha + \beta = 180^\circ$, значит, $AB \parallel CD$ по признаку.
как соотв при $(AB, CD, AD$ - сек)

4) $\angle DBA = \angle CAB$, $\angle BDC = \angle ACD$ $\Rightarrow$ $\triangle AOB$ - р/б, $\triangle COD$ - р/б по призн. $\Rightarrow$ $BD = AC = z$.

5) $\beta = 180^\circ - 3\alpha$, значит, $\sin\beta = \sin(180^\circ - 3\alpha) = \sin 3\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$.

6) По Т синусов в $\triangle ABD$: $\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)} = \frac{z}{\sin 2\alpha} = \frac{z}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

Отсюда $y = (4\cos^2\alpha - 1)x$; $z = (2\cos\alpha)x$. , $x, y, z \in \mathbb{N}$

7) $P(ABCD) = 3x + y = 2x + (4\cos^2\alpha)x$, значит, наименьший периметр будет при наименьшем допустимом $x \in \mathbb{N}$.

8) Проверим $x = 1$. тогда $z = 2\cos\alpha \in \mathbb{N}$, значит, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ или $\cos\alpha = 1$.
Если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \beta = 0^\circ$ Противоречие! Если $\cos\alpha = 1$, то $\alpha = 0^\circ$ Противоречие!
Значит, $x \neq 1$.

9) Проверим $x = 2$. Тогда $z = 4\cos\alpha \in \mathbb{N}$, $y = (4\cos^2\alpha - 1)\cdot 2 \in \mathbb{N}$, значит, $\cos\alpha = 1$, или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, или $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, или $\cos\alpha = 1$.

Случаи $\cos\alpha = 1$ и $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ рассмотрены ранее. Если $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, то $y = (\frac{1}{4} - 1)\cdot 2 \notin \mathbb{N}$ Противоречие! Если $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, то $y = (\frac{9}{4} - 1)\cdot 2 = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$ Противоречие.
Заметим, что $\cos\alpha \geq 0$*, иначе $\alpha > 90^\circ$ и $3\alpha + \beta > 180^\circ$ противоречие!
Значит, $x = 2$ не подходит.

10) Проверим $x = 3$. Тогда $z = 6\cos\alpha \in \mathbb{N}$, $y = (4\cos^2\alpha - 1)\cdot 3 \in \mathbb{N}$, значит, $\cos\alpha = 1$, или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, или $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, или $\cos\alpha = \frac{1}{6}$, или $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, или $\cos\alpha = \frac{2}{3}$

Если $\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$, то $\alpha \geq 60^\circ$ $180^\circ < 3\alpha + \beta$ Противоречие! Если $\cos\alpha = 1$, то, как мы ранее выяснили возникает противоречие, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, то $y = (\frac{16}{9} - 1)\cdot 3 = \frac{7}{3} \notin \mathbb{N}$, противоречие! Если $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, то $y = (\frac{50}{36} - 1)\cdot 3 = \frac{7}{18}\cdot 3 = \frac{7}{6} \notin \mathbb{N}$ противоречие! Значит, $x = 3$ не подходит.

11) Проверим $x = 4$. $z = 8\cos\alpha$, $y = 4(4\cos^2\alpha - 1)$, значит, $\cos\alpha = \frac{1}{8}$, или $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, или $\cos\alpha = \frac{3}{8}$, или $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, или $\cos\alpha = \frac{5}{8}$, или $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, или $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, или $\cos\alpha = 1$.

Случаи $\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha = 1$ были рассмотрены ранее и приводили к противоречию.
Если $\cos\alpha = \frac{5}{8}$, то $y = (\frac{100}{64} - 1)\cdot 4 = \frac{36}{64}\cdot 4 = \frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$ противоречие!
Если $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, то $y = (\frac{9}{4} - 1)\cdot 4 = 5 \in \mathbb{N}$, $z = 6 \in \mathbb{N}$. противоречий нет, подходит.
Если $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, то $y = (\frac{49}{16} - 1)\cdot 4 = \frac{33}{4} \notin \mathbb{N}$ противоречие!

Значит, $x = 4$ подходит, только при $\alpha = \arccos\frac{3}{4}$.
Тогда $ABCD$ – четырехугольник со сторонами $AB = 5$, $BC = CD = AD = 4$, диагоналями $BD = AC = 6$, углами $\angle BAD = 2\arccos\frac{3}{4}$, $\angle ABC = 2\arccos\frac{3}{4}$, $\angle BCD = 180^\circ - 2\arccos\frac{3}{4}$, $\angle CDA = 180^\circ - 2\arccos\frac{3}{4}$.

Чистовик 3.

12) Найдем площадь данного четырехугольника.

$S(ABCD) = S(\triangle ABD) + S(\triangle DBC) = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin\alpha + \frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin(\arccos\frac{3}{4}) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin(\arccos\frac{3}{4}) =$

$= 15 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + 12 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{27\sqrt{7}}{4}.$

Ответ: $AB = 5$; $BC = CD = AD = 4$; $BD = AC = 6$; $\angle CBA = \angle BAD = 2\arccos\frac{3}{4}$;
$\angle BCD = \angle CDA = 180° - 2\arccos\frac{3}{4}$; $S(ABCD) = \frac{27\sqrt{7}}{4}$.

Заметим, что периметр данного четырехугольника минимален, т.к. он минимален при минимальном x, а x для данного четырехугольника был найден минимальный из подходящих под остальные условия.

Чистовик ~~№~~ 1

№2 Вариант 10-1

$(18x^3-9x^2-2x+1)\arccos(-2x-1) \geq \arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$

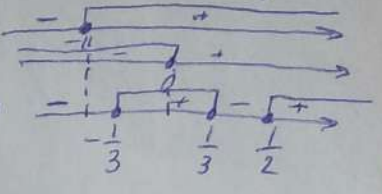
$2(x-\frac{1}{2})(3x-1)(3x+1)\arccos(-2x-1) \geq \arccos\left(\frac{2\sin(50^\circ+30^\circ)}{4\cos 40^\circ \sin 40^\circ}\right)$

$18\cancel{2}(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})\arccos(-2x-1) \geq \arccos 1$

$18(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3})\arccos(-2x-1) \geq 0$

Заметим, что $\arccos(-2x-1) \geq 0$. Отсюда нер-во равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \arccos(-2x-1)=0 \\ \begin{cases} -2x-1 \leq 1 \\ -2x-1 \geq -1 \\ 18(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3}) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -2x-1=1 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 0 \\ (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{3}) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $x \in \{-1\} \cup [-\frac{1}{3}; 0]$

№3

Б.О.О. $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x, y, z \geq 0$, $x+y+z=2022$. $x \geq y \geq z$, тогда $xyz+xy+yz+xz+2023 = xyz+xy+yz+xz+x+y+z+1 \leq$
$\leq x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$ причем рав-во достигается только при $x=y=z$.
при $x=y=z$ $3x=2022$ отсюда $x=674$.

Таким образом наибольшее значение выражения $xyz+xy+xz+yz+2023 =$
$= 674^3+3\cdot 674^2+3\cdot 674+1=(674+1)^3=675^3=(5^2\cdot 3^3)^3=5^6\cdot 3^9$

Найдем количество натуральных делителей данного числа

Оно равно $(6+1)\cdot(9+1)=70$, т.к. есть 7 вариантов для выбора степени 5 и 10 вариантов для выбора степени 3.

Ответ: 70 натуральных делителей.

№1

Оценим кол-во зачеркнутых квадратов от 12 до $2022+12-1=2033$

$n^2 \leq 2033$, $n \in \mathbb{N}$ Отсюда $n \leq \sqrt{2033} < 46$, ~~т.е. было зачеркнуто~~

~~$46-4+1$~~ Заметим, что $45^2=2025<2033$, значит, было зачеркнуто $45-4+1=42$ квадрата от 12 до 2033.

Оценим кол-во зачеркнутых кубов от 12 до $2022+12-1=2033$

$n^3 \leq 2033$, $n \in \mathbb{N}$ Отсюда $n \leq \sqrt[3]{2023} < 13$. Заметим, что $12^3=1728<2033$, значит, было зачеркнуто $12-3+1=10$ кубов от 12 до 2033, но среди них было 2 квадрата (64 и 729), значит было зачеркнуто всего 8 новых чисел. Итого было зачеркнуто $42+8=50$ чисел. от 12 до 2033. Таким образом на 2022 месте стало стоять число $2022+12-1+50=2083$. Проверим, что до него не было зачеркнуто ни одного квадрата или куба помимо 50 учтенных чисел.

$46^2=2116>2083$, значит, ни одного неучтенного квадрата не могло быть зачеркнуто.

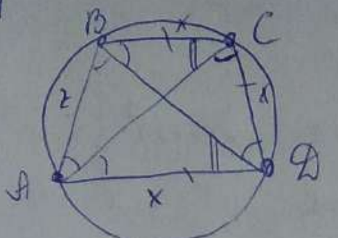
$13^3=2197>2083$, значит, ни одного неучтенного куба не могло быть зачеркнуто.

Таким образом, после зачеркиваний на 2022м месте в последовательности стоит число 2083.

Ответ: 2083.

Черновик... ,

Черновик 2.



ABCD - трап. р/б.

$BD = AC = y$

$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin 2\alpha}$

$y = 2\cos\alpha \cdot x$ $\quad y^2 = 4\cos^2\alpha\, x^2.$

$2\cos\alpha \in \mathbb{N}.$ $\quad \cos\alpha = 1$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}.$

Если $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, то $y = x$. $\alpha = \beta$.

$\cos\alpha = 1.$ $\quad \alpha = 60^\circ$ прот. $4\alpha = 180^\circ$ $\alpha = 45^\circ$

$y = 2x\cos\alpha \in \mathbb{N}$

$\sin\beta = \sin 3\alpha$ $\quad \frac{z}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}$ $\quad z = (4\cos^2\alpha - 1)x. \in \mathbb{N}.$

$x \in \mathbb{N}.$ $\quad x = 2$ $\quad x \in \mathbb{N}$

$4\cos\alpha$ $\quad (4\cos^2\alpha - 1)x.$

$|x^3 + 2x^2 + x - a| + |$ $\quad x^3 - 2x^2 + x + a| < 4x^2 - 8x.$ $\quad \cos\alpha = \frac{1}{2}.$

$2x\cos\alpha \in \mathbb{N}$ $\quad (4\cos^2\alpha - 1)x = (2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + 1)x \in \mathbb{N}.$

$2\cos > 1.$ $\quad \cos\alpha > \frac{1}{2}.$ $\quad \alpha < 60^\circ$

$p = 2x + (4\cos^2\alpha)x$

$\cos\alpha = \cancel{\frac{1}{4}}, \cancel{\frac{1}{2}}\ \frac{3}{4}\ \cancel{1}$

$\cos^2\alpha = \frac{9}{16}$

$x = 2$ $\quad \cancel{\frac{1}{4}}\ \cancel{\frac{1}{2}}\ \cancel{\frac{3}{4}}$

$x = 2$ $\quad x = 3$ $\quad \cancel{\frac{1}{6}}$

$x = 3$ $\quad \cos\alpha = \cancel{\frac{1}{6}}\ \cancel{\frac{1}{3}}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}$

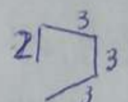
$\cos^2\alpha = \frac{4}{9}$

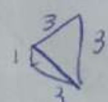
$4\cos^2\alpha \in \mathbb{1}$

$\frac{1}{3}$ $\quad 2$

$4\cos^2\alpha < 1$

$\cancel{\frac{1}{2}}\ \cancel{\frac{1}{6}}\ \cancel{\frac{2}{3}}$





4 3 3 3

5 3 3 3 3

$x = 4$ $\quad \frac{5}{8}$

5 4 4 4

$y^2 = 16 + 20 = 36$

$y = 6.$

$2x^3 + 2x < 4x^2 - 8x$

$2x^3 + 2x^2 + 5x < 0$

$x^3 - 2x^2 + 5x < 0$

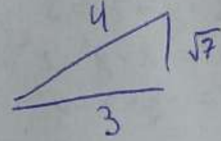
$x(x^2 - 2x + 5) < 0$

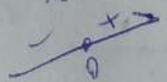
$\frac{5}{6}$

$\frac{16}{9} - 1 = \cancel{\frac{7}{9}}$

$1\frac{00}{36} - 1 = \frac{8^2}{6^2} = \frac{4}{9} \cdot 3$

$x^2 + 2x = y^2.$





$\frac{49}{22}$ $\quad \frac{9}{4} = 1$

$16 - 9 = 7$

$|x^3 + 2x^2 + x - a| + |x^3 - 2x^2 + x + a| < 4x^2 - 8x.$

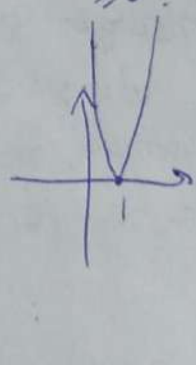
≥ 0 $\quad \geq 0.$

$P = 17.$

$(x + \varepsilon)$

$3x + 3\varepsilon + (4\cos^2\alpha - 1)(x + \varepsilon) =$ $\quad \sin = \frac{\sqrt{7}}{4}$ $\quad 4x^2 - 8x$

$= (x+\varepsilon)4\cos^2\alpha + 2x + 2\varepsilon.$



$x_0 = \frac{-b}{2a} = 1$

Черновик 1. 8 7 8 9

$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1)\arccos(-2x-1) \geq \arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$

$\arccos\left(\frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ}{4\sin 50^\circ \sin 40^\circ}\right) =$ $\cos 50^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ = 2\sin(50^\circ + 30^\circ) = 2\sin 80^\circ$

$\arccos 1 = 0$

$\frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = 1$

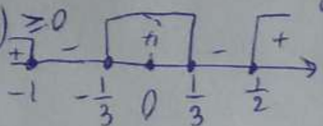
$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1)\arccos(-2x-1) \geq 0$

$(x - \frac{1}{2})(3\sqrt{2}x - \sqrt{2})(3\sqrt{2}x + \sqrt{2})\arccos(-2x-1) \geq 0$

$-1 \leq -2x - 1 \leq 1$
$0 \leq -2x \leq 2$
$0 \leq -x \leq 1$
$0 \geq x \geq -1$

$18x^3 - 9x^2 - 2x + 1 \mid x - \frac{1}{2}$; $18x^3 - 9x^2$; $18x^2 - 2$; $-2x+1$; $-2x+1$; 0

$\left[\begin{array}{l} -2x - 1 = 1 \quad x = -1 \\ \begin{cases} (x - \frac{1}{2})(3x - 1)(3x + 1) \geq 0 \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \end{array}\right.$



$x \in \{-1\} \cup [-\frac{1}{3}; 0]$.

12, 13, ... $a_i = 12 + i$

12 − 2022. 4

$n^2 \leq 2022$
$n < \sqrt{2022}$

$\sqrt{2022} = 44, \ldots$

$xyz + xy + yz + zx + 2023$

$x + y + z = 2022$
$x, y, z \geq 0$
$\in \mathbb{Z}$

$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ 336 336

$xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1$
$xyz + xy + yz + xz$ max.

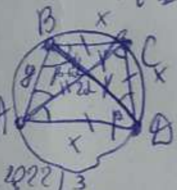
$x \geq y \geq z$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} = xy$

$(x+1)^3$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ $x = 674$



$\sin(180^\circ - 3\alpha) = 0 + \ldots \sin 3\alpha$.

$AC \cdot BD = x^3 \cdot AB$

$3x + AB \to \min$

$15^3 =$ 225 × 15

2022 | 3; 674

$\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{x}{\sin\alpha}$ $\beta + 3\alpha = 180^\circ$ $\beta = 180^\circ - 3\alpha$

$\frac{\sin(180^\circ - 3\alpha)}{\sin\alpha}$ $x =$

14^3 196 14 784 196

$(x+1)^3 - x^3 =$
$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$

× 144 12 288 144 1728

169 13 507 166

$x^2 + xy = AC \cdot BD$

$AC = BD = z$

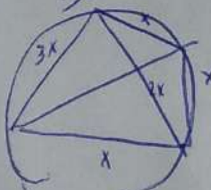
$x^2 + xy = z^2$

$\cos^2\alpha = 1$

675 | 5; 135 | 5; 27 | 3; 9 | 3; 3 | 3; 1

675 | 5; 135; 135 | 5; 27

$\sin 3\alpha =$
$= \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha =$
$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha =$
$= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha =$
$= \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$



$4\cos^2\alpha - 1 \in \mathbb{Z}$.

× 81 9 729

45 45 225 180

$y = 3x$

× 46 46 276 184

$4x^2 = z^2$

$z = 2x$

$y = x(4\cos^2\alpha - 1)$

$\sin(180^\circ - 3\alpha) =$ 2025

$\sin 3\alpha = \sin 2\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha(2\cos^2\alpha - 1) =$
$= \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$

× 121 11 121 121 1331

$y = 2x$

$n^2 \leq 2034$. $4\cos^2\alpha - 1 \in \mathbb{Z}$ 1 2

$\cos^2\alpha = \frac{3}{4}$

16 25 27 36 49 64

$n \leq \sqrt{2034} = 45\ldots$ 16 434 −425 9

85 5 425

45 − 4 + 1 = 42.

46 46 276 184 2116

$n^3 \leq 2034$

3 = 27 4 = 64 5 125 6 216 7 343 8 512 9 729 10 1000

11 1331 12 1728 8 50 1 2 3

2084. 10 + 2 − 1 = 11 2345

× 45 45 225 180 2025.

169 13 507 169 2197

× 144 12 288 144 1728