МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Богданов Ярослав Олегович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **90**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Богданов Ярослав Олегович

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	10 баллов	90 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\arccos(x-1) \le_{(\arccos)} \left(\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right)$$

ОДЗ

$-1 \le x-1 \le 1$

$0 \le x \le 2$

$$\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}=\frac{\cos 50+\sqrt{3}\cos 40}{4\cos 40\cos 50}=$$

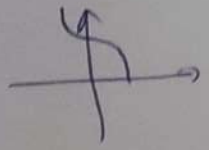
$$=\frac{2(\sin 30^\circ \sin 40+\sqrt{3}\cos 40)}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2\sin(40+30)}{4\cos 40\sin 40}=\frac{\sin 70}{\sin 80}$$

$$=\frac{\cos 50+\sqrt{3}\sin 50}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2(\sin 30\cos 50+\cos 30\sin 50)}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2\sin 80}{2\sin 80}=1$$

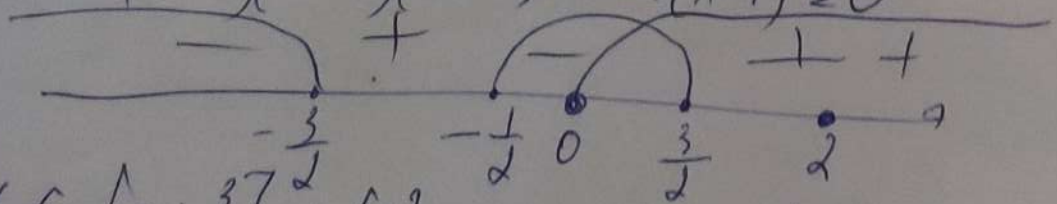


$\arccos(1)=0$

$$(4x^2(2x+1)-9(2x+1))\arccos(x-1)\le 0$$

$$(4x^2-9)(2x+1)\arccos(x-1)\le 0$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1)\le 0$$



$x \in [0;\frac{3}{2}] \cup \{2\}$

Чернокнижник

12 и

~~№6~~

2) $\begin{cases} x^3+2x^2+x \geq -a \\ x^3-2x^2+x \leq a \end{cases}$ ⑤

$\begin{cases} x^3+2x^2+x \geq -a \\ a \geq x^3-2x^2+x \end{cases}$ ④

$4x^2 \geq -2a$

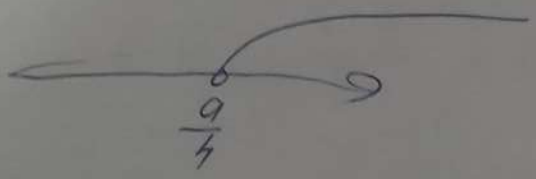
$2x^2 \geq -a$

$x^2 \geq -a$

$4x^2+2a < 4x^2+8x$

$8x > 2a$

$\begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ x^2 \geq -a \end{cases}$

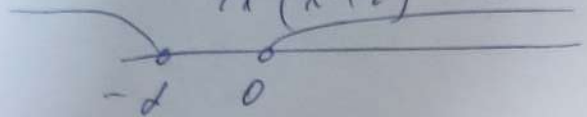


Черновик



$4x^3+8x>0$

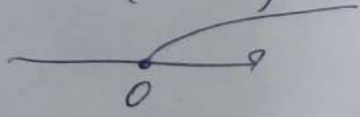
$4x(x+2)>0$



1) $\begin{cases} x^3+2x^2+x \geq -a \\ x^3-2x^2+x \geq a \end{cases}$ ⊕

$2x^3+2x \geq 0$

$2x(x^2+1) \geq 0$



$2x^3+2x \leq 4x^2+6x$

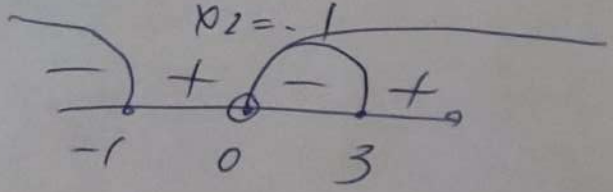
$2x^3-4x^2-6x \leq 0$

$2x(x^2-2x-3) \leq 0$

$x=a^2$

$x_1 = 1+2 = 3$

$x_2 = -1$



Чеховия

10

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1 =$$

$$= (a_n - 1)^3 + 1$$

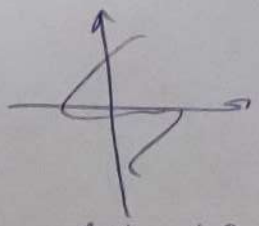
$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_2 = (a_1 - 1)^3 + 1 = \left(\frac{4043 - 2022}{2022}\right)^3 + 1 =$$

$$= \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$$

$$a_3 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^6 + 1$$

$$a_9 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1$$

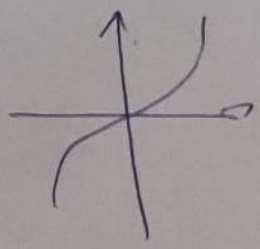


$f(t) = t^3$

$f'(t) = 3t^2$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^3 \vee \left(\frac{2021}{2022}\right)^6$$

$$1 \quad \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$$



$\Rightarrow$ a_1

$$m^3 + 1 \leq \frac{2022}{2021}$$

$$m^3 \leq \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3n} \leq \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{n} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$n \geq \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2021}}\right)$$

Рано или поздно такое n найдется

Черевик

~~$2^2=4$~~

$3^2=9$

$4^2=16$

$5^2=25$

$6^2=36$

$7^2=49$

$8^2=64$

$9^2=81$

$10^2=100$

$11^2=121$

$12^2=144$

$13^2=169$

$14^2=196$

$15^2=225$

$16^2=256$

$17^2=289$

$18^2=324$

$19^2=361$

$20^2=400$

$21^2=441$

$22^2=484$

$23^2=529$

$24^2=576$

$25^2=625$

$26^2=676$

$27^2=729$

28^2

29

30

31

32

33

55

$+\ 2021\ 5$

2026

$+\ 2026\ 55$

2081

$2081-2^2$

$=2079$

$34^2=$

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

$45^2=2025$

$46^2=2116$

Черепки

$1^3=1$

$3^3=27$

$4^3=64$

$5^3=125$

$6^3=216$

$7^3=343$

$8^3=512$

$9^3=729$

$10^3=100$

$11^3=1331$

$12^3=1727$

$13^3=2197$

$46\times46=2116$

$45\times45=2025$

$34\times34=1156$

$16\times16=256$

$26\times26=676$

$14\times14=196$

$98\times98=5776$

$17\times17=289$

$27\times27=729$

$49\times7=343$

$8\times64=512$

$121\times11=1331$

$144\times12=1728$

$169\times13=2197$

$23\times23=529$

8

Подобрали $a=8$ и $a=-24$

при $x=4$ получим $|100a+a|+|36-a|=96$

При $a>36$ решений нет

при $a\in 100$ тоже

$-100 \le a \le 36$ тоже $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a=8$ и $a=-24$ единственные

ЯП - 9.

При $a>12$ нер-во не имеет решений т.к. $\forall b \in [0;3]$

$b^3+2b^2+b+12>0$ и

$b^3+4-2b^2+x-12<0$ $\Rightarrow$ при росте a значение сохранится

$\Rightarrow$ имеет вид $4b^2+2a<4b^2+2b$

$2a<8b \Rightarrow$ при $b\le 3$ и $a>12$

неверно

Аналогично не подходит

$a<-48$.

Ответ: 8; -24

Числовик

7

№6 Докажем, что решения могут быть только на $[0;3]$:

$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a| \geq$

$|x^3+2x^2+x+a+x^3-2x^2+x-a| =$

$= |2x^3+2x|$ $\quad (|a|+|b| \geq |a+b|)$

При любом a решения исходного неравенства лежат в отрезке

$|2x^3+2x| \leq 4x^2+2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x+1)(x-3) \leq 0$ при $x \geq 0$, что уд. $x \in [0;3]$

$-2x(x^2+2x+5) \leq 0$ при $x \leq 0$ верно всегда т.к. $x^2+2x+5 > 0$

$\Rightarrow$ решения только на отрезке $[0;3]$

Решим задачу для $-4 \leq a \leq 12$

тогда у графиков будет общая точка $x=3$, т.к. $|48+a|+|12-a| = 60$, значит, должна быть ещё одна общая точка $x=2$ или $x=4$, чтобы получился отрезок $[2;3]$ и $[3;4]$ $x=2$

$|18-a|+|2-a| = 32$ не более 1-го решения.

6

В $\triangle ABC$ проведём высоту BH.

$BH = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{ABC} = 3\sqrt{7}$.

$R = \frac{a^2 \cdot c}{4S} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$ (

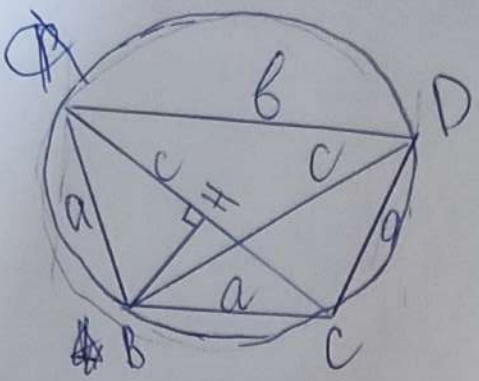
Ответ: $AB = BC = CD = 4$;
$DA = 5$;
$\frac{8}{\sqrt{7}}$

Чистовик

5

№3





$AB = BC = CD = a$

$DA = b$

$BD = AC = c$

1) По т. Птолемея $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$

$a^2 + ab = c^2$

2) $P_{ABCD} = 3a + b$. Заметим, что возможен вариант $P = 17$. Если $a = 4$, $b = 5$, $C = 6$ (удовлетворяет, т.к. $a + C > b$ и $C < 2a$).

Покажем, что меньше нельзя. При $a \geq 6$ меньше не будет. Далее: $a = 1$, $b + b1 = c^2$, есть решение $(3; 2)$, которое не удовлетворяет неравенству, при росте в тоже не удовлетворяет.

$a = 2$; $b = 6$; $C = 4$ не удовлетворяет ограничению $C < 2a$.

$a = 3$ $b = 9$ $C = 6$ не удовлетворяет $C < 2a$

все другие b при $a = 2$ и $a = 3$ тоже не удовлетворяют (т.к. b станет еще больше по сравнению с C) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все варианты перебрали.

$a = 4$ $b = 5$ $C = 6$.

$P_{min} = 17$

Ответ

4

№4

Введём последовательность: $x_n = a_n - 1$ и докажем, что существует n, такое что $x_n \leq \frac{1}{2021}$

$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3 \Rightarrow x_{n+1} = (x_n)^3 \Rightarrow x_{n+1} =$

$= (x_{n-1})^{3^n} \cdot x_1^{3^n}, \quad x_1 = \frac{2021}{2022} \Rightarrow x_{n+1} =$

$= \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n}$ т.к. $\left(\frac{2021}{2022}\right)^m \to 0$ при $m \to \infty$, то существует n, такое, что $x_n \leq \frac{1}{2021} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \leq \frac{2022}{2021}$.

Ответ: да

Чистовик

№2 $\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) =$

$= 0$, так как $\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} =$

$= \frac{4\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$

$= \frac{\sin 80^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 30^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$

$= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$

$\arccos 1 = 0 \Rightarrow$

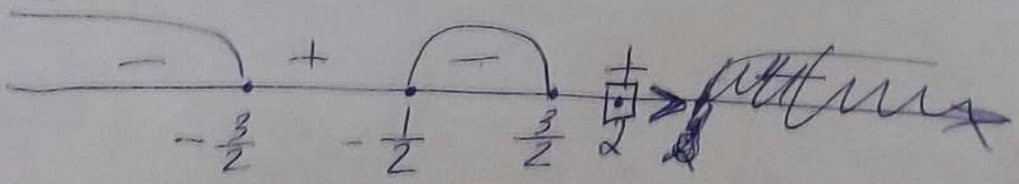
нужно решить неравенство:

$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1) \le 0$

ОДЗ:

$0 \le x \le 2$

$\left[\begin{array}{l}(2x-3)(2x+3)(2x+1) \le 0 \\ x = 2\end{array}\right.$ (метод интервалов)



С учётом ОДЗ:

$x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$

Ответ: $\left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$

Чистовик

№1 [Вариант 11-1]

Заметим, что в исходной последовательности на 2022 месте стоит 2027. В интервале от 6 до 2027 будет 43 квадрата и 11 кубов. Итого 2081. Заметим, что 64 и 729 - шестые степени. Следовательно, попадают два раза. Исключим их. Получим 2079. Заметим, что в интервал от 2027 до 2079 не попадают ни кубы, ни квадраты.

Ответ: 2079

Частоколы

№6 Докажем, что решения могут быть только на $[0;3]$:

$|x^3+2x^2+x+a|+|x^3-2x^2+x-a| \geq$

$|x^3+2x^2+x+a+x^3-2x^2+x-a| \geq$

$\geq |2x^3+2x|$ $\quad (|a|+|b| \geq |a+b|)$

При любом a решения исходного нер-ва лежат в отрезке

$|2x^3+2x| \leq 4x^2+3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x+1)(x-3) \leq 0$ при $x \geq 0$, что уд. усл. $x \in [0;3]$

$-2x(x^2+2x+5) \leq 0$ при $x \leq 0$ верно всегда т.к. $x^2+2x+5>0$

$\Rightarrow$ решения только на отрезке $[0;3]$

Решим задачу для $-48 \leq a \leq 12$

тогда у графиков будет общая точка $x=3$, т.к. $|48+a|+|12-a|=60$, значит, должна быть ещё одна общая точка $x=2$ или $x=4$, чтобы получились отрезки $[2;3]$ и $[3;4]$ $x=2$

$|18+a|+|2-a|=32$ не более 1-го решения.

Ответ: 6

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\arccos(x-1) \le_{\arccos} \left(\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right)$$

ОДЗ

$$-1 \le x-1 \le 1$$

$$0 \le x \le 2$$

$$\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}=\frac{\cos 50+\sqrt{3}\cos 40}{4\cos 40\cos 50}=$$

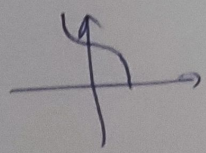
$$=\frac{2(\sin 30^\circ \sin 40+\sqrt{3}\cos 40}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2\sin(40+30)}{4\cos 40\sin 40}=\frac{\sin 70}{\sin 80}$$

$$=\frac{\cos 50+\sqrt{3}\sin 50}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2(\sin 30\cos 50+\cos 30\sin 50)}{4\cos 40\cos 50}=$$

$$=\frac{2\sin 80}{2\sin 80}=1$$

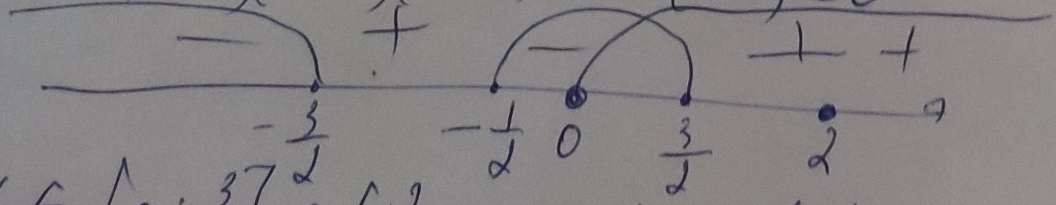


$$\arccos(1)=0$$

$$(4x^2(2x+1)-9(2x+1))\arccos(x-1)\le 0$$

$$(4x^2-9)(2x+1)\arccos(x-1)\le 0$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1)\le 0$$



$x \in [0;\frac{3}{2}] \cup \{2\}$

Чертеж

12 ч

~~№6~~

2) $\begin{cases} x^3+4x^2+x \geq -a \\ x^3-2x^2+x \leq a \end{cases}$ ②

$x^3+4x^2+x \geq -a$ ①

$a \geq x^3-4x^2+x$

$4x^2 \geq -2a$

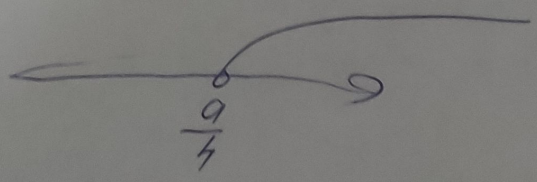
$2x^2 \geq -a$

$x^2 \geq -a$

$4x^2+2a < 4x^2+8x$

$8x > 2a$

$\begin{cases} x > \frac{a}{4} \\ x^2 \geq -a \end{cases}$

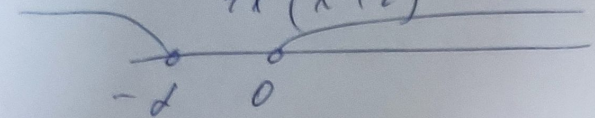


Черновик



$4x^2+8x>0$

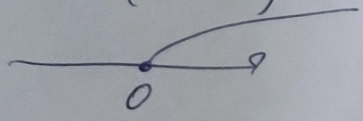
$4x(x+2)>0$



1) $\begin{cases} x^3+2x^2+x \geq -a \\ x^3-2x^2+x \geq a \end{cases}$ ⊕

$2x^3+2x \geq 0$

$2x(x^2+1) \geq 0$



$2x^3+2x \leq 4x^2+6x$

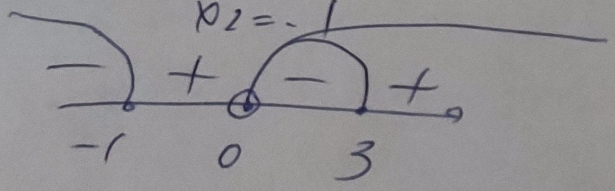
$2x^3-4x^2-6x \leq 0$

$2x(x^2-2x-3) \leq 0$

$x=d^2$

$x_1 = 1+2=3$

$x_2 = -1$



Чеховия

10

$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1 =$

$= (a_n - 1)^3 + 1$

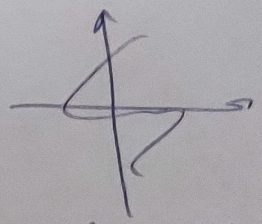
$a_1 = \frac{4043}{2022}$

$a_2 = (a_1 - 1)^3 + 1 = \left(\frac{4043 - 2022}{2022}\right)^3 + 1 =$

$= \left(\frac{2021}{2022}\right)^3 + 1$

$a_3 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^6 + 1$

$a_4 = \left(\frac{2021}{2022}\right)^9 + 1$

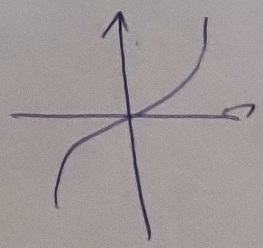


$f(t) = t^3$

$f'(t) = 3t^2$

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^3 \vee \left(\frac{2021}{2022}\right)^6$

$1 \Rightarrow \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$



$\Rightarrow a_1 \cdot$

$m^3 + 1 \leq \frac{2022}{2021}$

$m^3 \leq \frac{1}{2021}$

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3n} \leq \frac{1}{2021}$

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$

$n \geq \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2021}}\right)$

Равно или какое такое n найдется

Черевик

$2^2 = 4$

$3^2 = 9$

$4^2 = 16$

$5^2 = 25$

$6^2 = 36$

$7^2 = 49$

$8^2 = 64$

$9^2 = 81$

$10^2 = 100$

$11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$13^2 = 169$

$14^2 = 196$

$15^2 = 225$

$16^2 = 256$

$17^2 = 289$

$18^2 = 324$

$19^2 = 361$

$20^2 = 400$

$21^2 = 441$

$22^2 = 484$

$23^2 = 529$

$24^2 = 576$

$25^2 = 625$

$26^2 = 676$

$27^2 = 729$

28

29

30

31

32

33

55

$2021 + 5 = 2027$

$2026 + 53 = 2081$

$2081 - 2^2 = 2079$

34

35

36

37

38

39

40

41

42

43

44

$45^2 = 2025$

$46^2 = 2116$

Черновик

$1^3 = 1$

$3^3 = 27$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$7^3 = 343$

$8^3 = 512$

$9^3 = 729$

$10^3 = 100$

$11^3 = 1331$

$12^3 = 1728$

$13^3 = 2197$

$45 \cdot 45 = 2025$

$46 \cdot 46 = 2116$

$34 \cdot 34 = 1156$

$26 \cdot 26 = 676$

$23 \cdot 23 = 529$

$14 \cdot 14 = 196$

$17 \cdot 17 = 289$

8

Подходят $a=8$ и $a=-24$

при $x=4$ получим $|100a+a|+|36-a|=$

$=96$

При $a>36$ решений нет

при $a\in 100$ точек

$-100 \le a \le 36$ точек $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a=8$ и $a=-24$ единственные

ЧТД.

При $a>12$ нер-во не имеет

решений т.к. $b \in [0;3]$

$b^3+2b^2+b+12 \ge 0$ и

$b^3+4-2b^2+x-12 \le 0$ $\Rightarrow$ при

росте a значение сохранится

$\Rightarrow$ имеет вид $4b^2+2a < 4b^2+30$

$2a < 80 \Rightarrow$ при $b \le 3$ и $a>12$

неверно

Аналогично не подходит

$a < -48$.

Ответ: $8; -24$

Числа

В $\triangle ABC$ проведём высоту BH.

$BH = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7} \Rightarrow S_{ABC} = 3\sqrt{7}$.

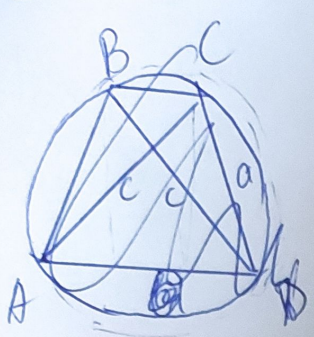
$R = \frac{a^2 \cdot c}{4S} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{4 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$ (

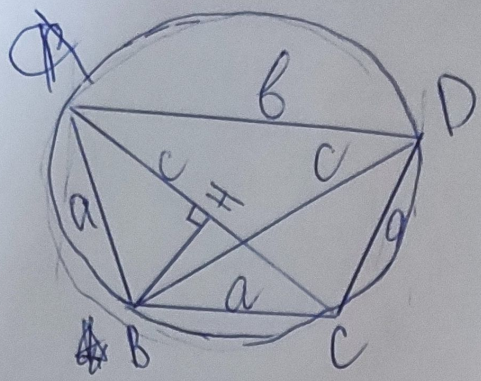
Ответ: $AB = BC = CD = 4$;
$DA = 5$;
$\frac{8}{\sqrt{7}}$

Чистовик

5

№3





$AB = BC = CD = a$

$DA = b$

$BD = AC = c$

1) По т. Птолемея $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC$

$a^2 + ab = c^2$

2) $P_{ABCD} = 3a + b$. Заметим, что возможен вариант $P = 17$. Если $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$ (удовлетворяет, т.к. $a + c > b$ и $c < 2a$).

Покажем, что меньше нельзя. При $a \geq 6$ меньше не будет. Далее: $a = 1$, $b + 1 = c^2$, есть решение $(3; 2)$, которое не удовлетворяет неравенству, при росте в тоже не удовлетворяет.

$a = 2$; $b = 6$; $c = 4$ не удовлетворяет ограничению $c < 2a$.

$a = 3$ $b = 9$ $c = 6$ не удовлетворяет $c < 2a$

все другие b при $a = 2$ и $a = 3$ тоже не удовлетворяют (т.к. b станет еще больше по сравнению с c) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ все варианты перебрали.

$a = 4$ $b = 5$ $c = 6$.

$P_{min} = 17$

Ответ: 4

№4

Введём последовательность: $x_n = a_n - 1$ и докажем, что существует n, такое что $x_n \leq \frac{1}{2021}$

$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3 \Rightarrow x_{n+1} = (x_n)^3 \Rightarrow x_{n+1} =$

$= (x_1)^{3^n}$, $x_1 = \frac{2021}{2022} \Rightarrow x_{n+1} =$

$= \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^n}$ т.к. $\left(\frac{2021}{2022}\right)^m \to 0$ при $m \to \infty$, то существует n, такое, что $x_n \leq \frac{1}{2021} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n \leq \frac{2022}{2021}$

Ответ: да

Частоник

№2 $\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) =$

$= 0$, так как $\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} =$

$= \frac{4\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$

$= \frac{\sin 80^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 50^\circ + \sin 50^\circ \cos 30^\circ}{2\cos 40^\circ \cos 50^\circ} =$

$= \frac{2\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$

$\arccos 1 = 0 \Rightarrow$

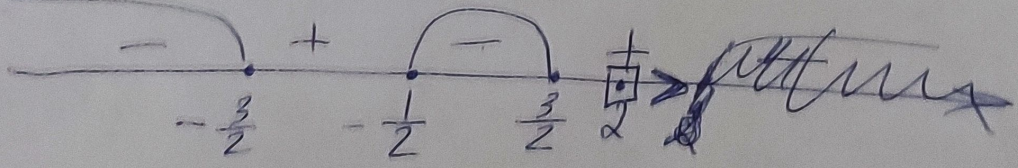
нужно решить неравенство:

$(2x-3)(2x+3)(2x+1)\arccos(x-1) \le 0$

ОДЗ:

$0 \le x \le 2$

$\left[\begin{array}{l} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \le 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (метод интервалов)



С учётом ОДЗ:

$x \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$

Ответ: $\left[0; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$

Чистовик

№1 [Вариант 11-1]

Заметим, что в исходной последовательности на 2022 месте стоит 2027. В интервале от 6 до 2027 будет 13 квадратов и 11 кубов. Итого 2081. Заметим, что 64 и 729 - шестые степени. Следовательно, попадают два раза. Исключим их. Получим 2079. Заметим, что в интервал от 2027 до 2079 не попадают ни кубы, ни квадраты.

Ответ: 2079

Частник