



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Аленчиков Александр Васильевич**

Класс: **10-11**

Технический балл: **85**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Аленчиков Александр Васильевич

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	10 баллов	20 баллов	10 баллов	15 баллов	85 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

N 1

Вариант 11-1

Числовик 1

Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5 не входят 3 числа, которые не являются квадратами и/или кубами. Также будем искать такое число, которое находится в последовательности 1, 1, 3, 4, 5, ...

и 2025 месте. Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, ..., N будет: $[\sqrt{N}]$ чисел, являющихся полными квадратами, $[\sqrt[3]{N}]$ чисел, являющихся полными кубами, $[\sqrt[6]{N}]$ чисел, из которых можно взглянуть как второе, так и третье место (т.е. шестую).

Значит, кол-во чисел в последовательности 1, 2, 3, 4, 5, ..., N без полных квадратов и кубов выражается формулой: $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}]$.

Значит, можем составить уравнение: $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] = 2025$
 А) Если $N < 45^2 = 2025$, то $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] < 2025 - 45 -$
 $- ([\sqrt[3]{N}] - [\sqrt[6]{N}]) \leq 2025 - 45 < 2025$

Б) Если $46^2 = 2116 > N \geq 45^2 = 2025$, то $13^3 = 2197 > N > 12^3 = 1728$ и
 $4^6 = 4096 > N > 3^6 = 729$.

Значит, $N - [\sqrt{N}] - [\sqrt[3]{N}] + [\sqrt[6]{N}] = N - 45 - 12 + 3 = N - 54$

$\Rightarrow N - 54 = 2025$

$\Rightarrow N = 2079$.

Ответ: 2079.

N 2

$$\text{III.к. } \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ} = \frac{\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\sin 80^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{\sin(90^\circ - 10^\circ)} = 1$$

$$\Rightarrow \text{Неравенство имеет вид: } (8x^3 + 4x^2 - 16x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

Левая часть неравенства определена при $|x-1| \leq 1$, поэтому $x \in [0; 2]$

На этом отрезке первый сомножитель $(8x^3 + 4x^2 - 16x - 9) = (2x+1)(2x-3)(2x+3)$

отрицателен при $x \in [0; \frac{3}{2})$ и неотрицателен при $x \in [\frac{3}{2}; 2]$, а второй сомножитель всегда неотрицателен.

$$\Rightarrow x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

$$\text{Ответ: } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}.$$

№3

Условие 3

Из равенства $AB = CD$, а так же из того, что перпендикулярные высоты и то, что равные хорды стягивают равные дуги, значит $BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ - равнобедренная трапеция с боковыми сторонами AB и CD .

Пусть $AB = BC = CD = a$, $AD = b$, $AC = BD = c$, высоту $h = BH$ найдем по теореме Пифагора: $h^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, $c^2 = h^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = a^2 + ab$. Также самое можно было бы получить по теореме Птолемея: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC \Rightarrow c^2 = a^2 + ab$

$\Rightarrow c^2 = a(a+b)$, где a, b, c - натуральные числа, и $3a > b$, т.е. $b \leq 3a - 1$.
если $a = 1$, то $b \in [1; 2]$ и уравнение $c^2 = 1(1+b)$ не имеет целых решений.
если $a = 2$, то $b \in [1; 5]$ и уравнение $c^2 = 2(2+b)$ не имеет целых решений.
если $a = 3$, то $b \in [1; 8]$ и уравнение $c^2 = 3(3+b)$ не имеет целых решений.
если $a = 4$, то $b \in [1; 11]$ и уравнение $c^2 = 4(4+b)$ имеет решение $b = 5$ и $c = 6$.
Тогда, периметр равен $3a + b = 17$.

если $a \geq 5$, то периметр будет > 17 , т.к. если $3a + b \leq 17$, то $a = 5$, тогда или $b = 1$ и $c^2 = 30$, или $b = 2$ и $c^2 = 35$, что не возможно в обоих случаях.
 $\Rightarrow AB = BC = CD = 4$, $AD = 5$, $AC = BD = 6$, периметр равен 17.

$\Rightarrow$ высота трапеции равна $\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$,
синус угла при основании $\sin A = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$,

искомый радиус находится по теореме синусов:

$$2R = \frac{BD}{\sin A} = \frac{6 \cdot 8}{3\sqrt{7}} \Rightarrow R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

N 4

Условие 4

Перепишем функцию в удобной форме в виде $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$
 Пусть, что если $a_n = 1 + \epsilon$, то $a_{n+1} = 1 + \epsilon^3$. Тогда из условия
 задачи $a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$, получим $a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3$, ..., $a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$

$$\text{П.к. } a_n \leq \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \frac{\log_{2021} \left(\frac{1}{2021}\right)}{\log_{2021} \frac{2021}{2022}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3 \left(\frac{\log_{2021} \frac{1}{2021}}{\log_{2021} \frac{2021}{2022}} \right), \text{ ~~так как~~$$

то для любого $n \geq 1 + \log_3 \left(\frac{\log_{2021} \frac{1}{2021}}{\log_{2021} \frac{2021}{2022}} \right)$ неравенство выполняется.

Ост. гд.

N5

Условие 5

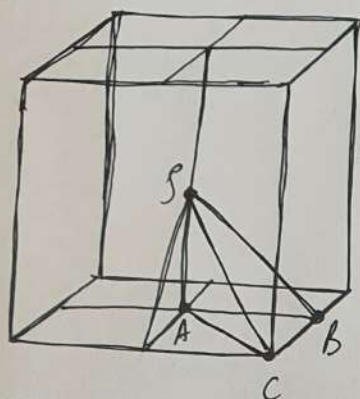


рис. 1

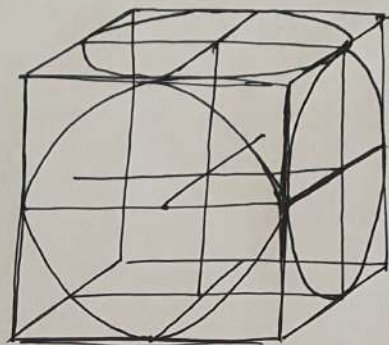


рис. 2

Пусть ребро $SA = AB = a$. Пирамида $SABC$ составляет $\frac{1}{48}$ часть куба на рис. 1. с ребрами $2a$. Проведем все 48 пирамид, образующих этот куб относительно центра - симметрично относительно одной вершины S . Тогда, искомый объем, есть $\frac{1}{48}$ объема тела, образованного сферическим шаром радиуса $R = \sqrt{2}a$ и частью куба. Это пересечение сфер шаров с шестью шаровыми сегментами с высотой шарового сегмента $h = (\sqrt{2} - 1)a$.

Объем сферического сегмента вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - 6\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}a^3 - 6\pi(\sqrt{2}-1)^2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)a^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3}\pi a^3 - 2(3-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)\pi a^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 (4\sqrt{2} - 3(4\sqrt{2}-5)) = \frac{2}{3}\pi a^3 (15 - 8\sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ искомый объем равен $\frac{2}{3 \cdot 48} \pi a^3 (15 - 8\sqrt{2}) = \frac{\pi a^3 (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$

Заметим, что объем всей пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (или, тоже самое, что и $\frac{1}{48}$ часть куба). Искомый объем части пирамиды больше, чем $\frac{1}{2}$ объема пирамиды, т.к. $\frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9} > 1 \Rightarrow \frac{15 - 8\sqrt{2}}{9} > \frac{15 - 12}{9} = \frac{1}{3} > \frac{1}{\pi}$

Это подтверждает, что мы нашли объем большей части пирамиды.

Ответ: $\frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$

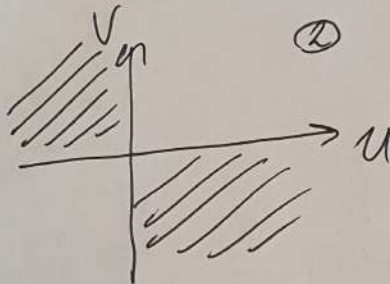
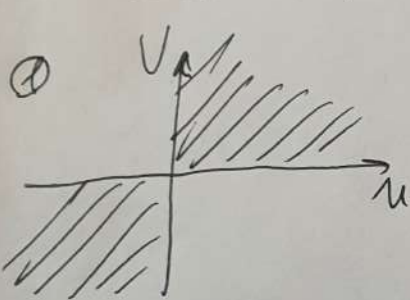
№ Заметим, что можно также и так, используя
удобные условия:

$$|u| + |v| = |u+v| \quad (1)$$

или

$$|u| + |v| = |u-v| \quad (2)$$

на плоскости (u, v) возможны следующие случаи:



Т.е. , $|u| + |v| < c \Leftrightarrow \begin{cases} |u+v| < c \\ |u-v| < c \end{cases}$

Можно переписать равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x^3 + 2x < 4x^2 + 4x \\ -2x^3 - 2x < 4x^2 + 4x \\ 4x^2 + 2a < 4x^2 + 4x \\ -4x^2 - 2a < 4x^2 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0 \\ x(x^2 + 2x + 1) > 0 \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x+1)^2 + 9 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x > \frac{a}{4} \\ (x + \frac{1}{2})^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}$$

а) если $a > 1$, то $\frac{a}{4} > \frac{1}{4}$ и требуемое усл. выполняется тогда и только тогда, когда $\frac{a}{4} = 1 \Leftrightarrow a = 8 \quad (> 1)$

б) если $a \leq 1$, то $\frac{a}{4} \leq \frac{1}{4}$ и требуемое усл. выполняется тогда и только тогда, когда: $\sqrt{1 - \frac{a}{4}} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow a = -24 \quad (\leq 1)$

Ответ: $-24; 8$.

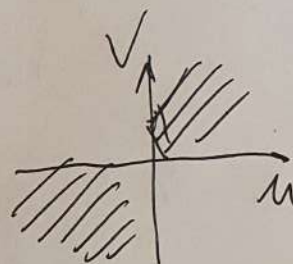
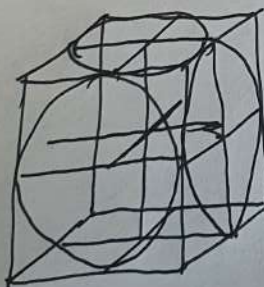
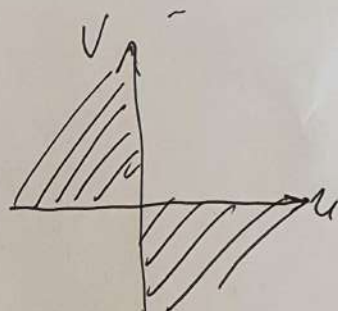
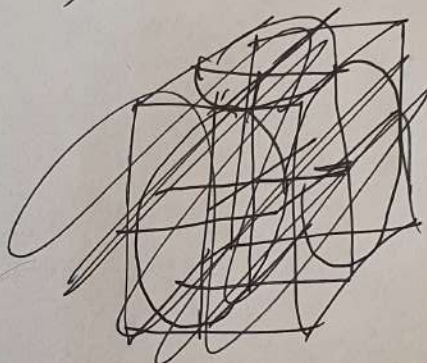
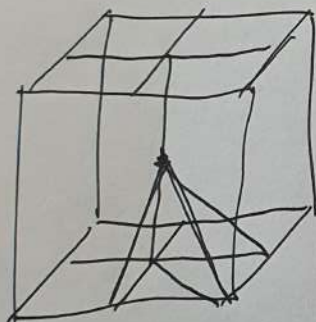
$$\sqrt{4^2 - \left(\frac{5-4}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 7}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

Черновик 8

$$a_4 \leq \frac{\log 2}{\log 21} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\log 2}{\log 21}\right)^{3^{4-1}} \geq 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{4-1} \leq \frac{\log_{2021} \frac{1}{2021}}{\log_{2021} \frac{1}{2021}} \Leftrightarrow n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{2021} \frac{1}{2021} \right)$$

$$n \geq 1 + \log_3 \left(\log_{2021} 2021 \right)$$



$$2x^3 + 2x < 4x^2 + 4x$$

$$2x^3 + 2x - 4x^2 - 4x < 0$$

$$x(2x^2 + 2x - 4x^2 - 4x) < 0$$

$$x(2x - 3)(x + 1) < 0$$

$$-2x^3 - 2x < 4x^2 + 4x$$

$$4x^2 + 4x + 2x^3 + 2x > 0$$

$$x(4x + 4 + 2x^2 + 2) > 0 \quad -4x^2 - 2x < 4x^2 + 4x$$

$$x(2x^2 + 5x + 2) > 0$$

$$4x^2 + 2x < 4x^2 + 4x$$

$$2x^2 + 4x + 2x > 0 \quad | :2$$

$$2x - 2 > 0$$

$$x > \frac{1}{1}$$

$$4x^2 - 4x + 4x - 1 > 0$$

$$(2x - 1)^2 > 0$$