



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Джаин Матвей**

Класс: **10-11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Джаин Матвей

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	20 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

11

Числовик

BP 11-1

12

$$\begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 30^\circ}\right) \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} 2x(4x^2 - 9) + (4x^2 - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{4\cos 50^\circ + 4\sqrt{3}\cos 40^\circ}{16\cos 40^\circ \cos 30^\circ}\right) \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (4x^2 - 9)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{4\cos 35^\circ + 4\sqrt{3}\cos 40^\circ}{16\cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{2(\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ)}{2(\cos 90^\circ + \cos 10^\circ)}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 30^\circ \cos(90^\circ - 40^\circ) + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\sin 30^\circ \cos(90^\circ - 40^\circ) + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 30^\circ \sin 40^\circ + \cos 30^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cos(40^\circ - 30^\circ)}{\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases} \quad (=)$$

$$(2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq \arccos(1)$$

12

Числовик

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x \in [0; 2] \end{cases}$$

(=)

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq 0 \\ x \in [0; 2] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

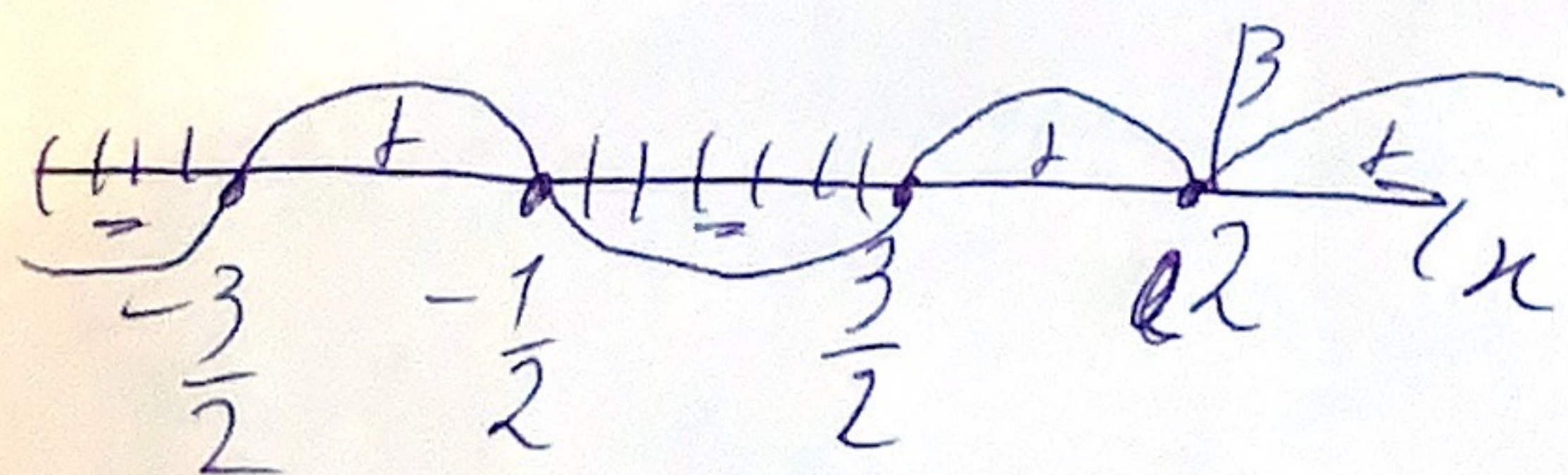
$$1) (x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}) \arccos(x-1) \leq 0 \quad (1)$$

a) $\arccos x \in [0; \pi]$ - по определению
 ~~$\arccos x$~~ аркосинуса

$\arccos(x-1)$ - может являться нулем
пер-ва ~~при $x=2$~~ $x-1=1$
 $x=2$, но ~~не~~ ~~знает~~
никогда не влият на знак пер-ва, т.к.
 $\arccos(x-1) \geq 0$ по определению

$$(x-\frac{3}{2})(x+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}) \arccos(x-1) \leq 0 \Rightarrow$$

$$x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

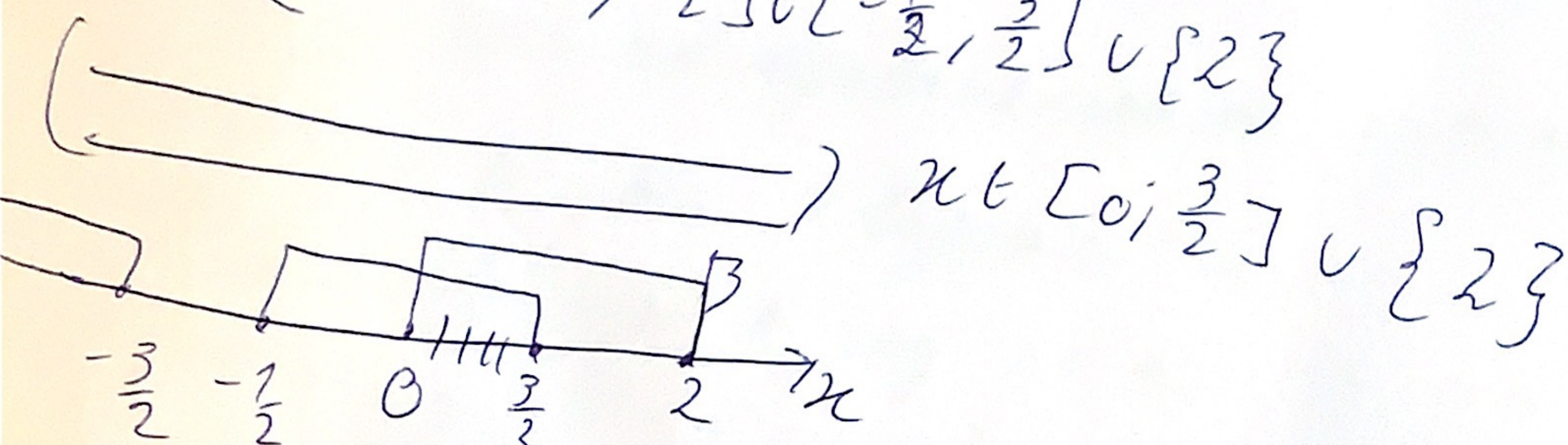


$$(\Rightarrow) \begin{cases} x \in [0; 2] \\ x \in (-\infty; -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}] \cup \{2\} \end{cases} \quad (\Rightarrow) x \in [0; 2] \quad (\Rightarrow)$$

13

Условие

$$\begin{aligned} (=) \{ & x \in [0; 2] \\ & x \in \left((-2, -\frac{3}{2}] \cup [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \cup \{2\} \right) \end{aligned} \quad (=)$$



ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$

N1 6; 7; 8; 9; 10 - последовательность $\star$

1) Найти число, которое изначально стоит на 2022-м месте.

6 + 2022 - 1 = 2027 - число на #2022

Задача: Какое число окажется на 2022-м месте в данной последовательности, если в ней удалят все квадраты и кубы каких-либо натуральных чисел.

2) Каким будет квадратом натурального числа перед тем, как 2027 является квадратом числа 45

$$45^2 = 2025 \quad (46^2 = 2116 > 2027)$$

Частовик

т.к. данная последовательность называется
числа 6, то квадраты чисел:

9 не вписывается в эту последовательность
начальную ($1^2 = 1 < 6; 2^2 = 4 < 6; 3^2 = 9 > 6$)

||
что квадраты всего ~~45~~ $45 - 2 = 43$ чисел
имеет в этой последовательности:

Уберём из данной ~~последовательности~~
~~43~~ все квадраты чисел ~~от 1 до~~ (43 числа)

||
число 2027 с ~~кодом~~ #2022 переписывается
на номер 2022 - $43 = 1979$ (число 2027 переносится
на 1979 - место) $\Rightarrow$ перенос на #2022
число 2027 + 43 = 2070

||
Наибольший куб: ~~входящий в эту последовательность~~
~~до 2022~~ ~~числа~~ $12^3 = 1728$ ($12^3 + 13^3 = 2197 + 2025$)

||
т.к. последовательность называется с
числа 6, то куб числа 1 не вписывается
в эту последовательность ($1^3 = 1 < 6; 2^3 = 8 > 6$)
1) ~~то~~ остаётся $12 - 1 = 11$ кубов
~~остаток~~

45

т.к.
Челтовик

8) Проверим нет ли среди этих 11 кубов
квадраты чисел от 6 до 45
выпишем их:
 $2^3=8; 3^3=27$
 $2^3; 3^3; 4^3; 5^3; 6^3; 7^3; 8^3; 9^3; 10^3; 11^3$
числа 4^3 и 9^3 уже были убраны из последо-
вательности, как квадраты

$\Rightarrow 4^3 = 2^6 = 8^2$; $9^3 = 3^6 = 27^2$ т.к. $4 = 2^2$; $9 = 3^2$,
убраны при убрании как квадраты
остатся всего $11 - 2 = 9$ кубов

9) уберем эти 9 кубов из последовательности
чисел 2020 с # 2022 перенесем на
на $2022 - 9 = 2013$ место $\Rightarrow$

место равно $2020 + 9 = 2029$
число располагается на 2022

10) Проверим не попал ли какой-нибудь квадрат
больше 45 ответ: 2029
числа 748
т.к. куб числа $\neq 13$ больше 12 в последо-
вательности
 $46^2 = 2116 \neq 2029$; $13^3 = 2197 \neq 2029$ $\Rightarrow$ не попал

16

Числовик

~~14~~

=) србелм: 2019

14

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

Загати: Сер и макс

сма, иатура чнол

$$n, \text{ смосв } |a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\frac{-2022}{2021} \leq a_n \leq \frac{2022}{2021}$$

$$1) a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1$$

$$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3$$

Замена: $b_n = a_{n+1} - 1$

$$b_n = a_n - 1$$

$$b_{n+1} = b_n^3$$

перепорупуруе условие

мак n , не компел
пу компел

Загати: Сер и

$$m.v. \quad b_1 = a_1 - 1$$

$$b_1 = a_1 - 1 = \frac{4043}{2022} - \frac{2021}{2022}$$

$$ne \Rightarrow b_1 < 1 \Rightarrow$$

$$b_{n+1} = b_n^3 < b_n, \text{ т.ч. } b_n \rightarrow 0$$

$$|b_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

$$|b_n| \leq \frac{1}{2021}$$

17

учебник

н.н.

~~14~~
аⁿ

$1 - \frac{1}{2} < a < 1$ и $n \geq 1$

$a > a^n$

||

$b_n \rightarrow 0$

н.н. $13^n \rightarrow \infty$ стремиться к бесконечности

стремиться к бесконечности, т.е. $n \rightarrow +\infty$

||
б.т.н. $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

н.н. $\frac{1}{2^{n+1}} \rightarrow 0$, т.е.

каждый раз можно n
при котором $|b_n| < \frac{1}{2021}$

Следств.: каковы

18

Числовик

16

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

Найти все a при которых решение
пер-ва представляет собой на числовой
прямой промежуток равный 1.

1) Слз:

$4x^2 + 8x \geq 0$ (т.к. $|a| + |b| \geq 0$ при любых a, b)

$$4x(x+2) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$$

2) Раскроем модули со ~~все~~ всеми возможными
комбинациями знаков модулей;

1) $\oplus \oplus$

$$x^3 + 2x^2 + x + a + x^3 - 2x^2 + x - a < 4x^2 + 8x$$

$$2x^3 + 2x - 4x^2 - 8x < 0$$

$$2x^3 - 4x^2 - 6x < 0 \quad | : 2$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x < 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) < 0$$

$$x(x-3)(x+1) < 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & - & + & - & + & - & + \\ 1 & & 3 & & -1 & & x \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3)$$

4/3

Четовик

II) $\ominus \ominus$

$$\underbrace{-x^3 - 2x^2 - x - a} - \underbrace{-x^3 + 2x^2 - x + a} < 4x^2 + 8x$$

$$\underbrace{-2x^3 - 2x} < 4x^2 + 8x$$

$$2x^3 + 2x^2 + 7x \neq 0 \quad |:2$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x \neq 0$$

$$x(x^2 + 2x + 5) \neq 0$$

$$\Delta < 0 \quad \text{---}$$

$$x \neq 0$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & x^2 + 2x + 5 = 0 \\ & D = 4 - 20 = -16 < 0 \\ & \text{---} \\ & x^2 + 2x + 5 \neq 0 \\ & \text{всегда} \end{aligned}$$

III) $\oplus \ominus$

$$\underbrace{x^3 + 2x^2 + x + a} - \underbrace{-x^3 + 2x^2 - x + a} < 4x^2 + 8x$$

$$\underbrace{4x^2 + 2a} < \underbrace{4x^2 + 8x}$$

$$8x > 2a$$

$$x > \frac{a}{4}$$

IV) $\ominus \oplus$

$$\underbrace{-x^3 - 2x^2 - x - a} + \underbrace{-x^3 - 2x^2 + x - a} < 4x^2 + 8x$$

$$\underbrace{-4x^2 - 2a} > \underbrace{4x^2 + 8x}$$

$$8x^2 + 8x + 2a > 0 \quad |:2$$

$$4x^2 + 4x + a > 0$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{1-a}-1}{2}\right) \left(x + \frac{1+\sqrt{1-a}}{2}\right) > 0$$

$$x \in \left(-\frac{1+\sqrt{1-a}}{2}, \frac{\sqrt{1-a}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{1-a}-1}{2}, +\infty\right)$$

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 4x + a \neq 0 \\ & (4x^2 + 4x + 1) > 1 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 4x + a = 0 \\ & D = 16 - 16a = 16(1-a) \\ & x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16(1-a)}}{8} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{1-a}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2} \end{aligned}$$

~~110~~ 110 Четовик

Составим систему:

$$\begin{cases} k \in (-2; -2) \cup (0; +\infty) \\ k \in (-2; -1) \cup (0; 3) \\ k \geq 0 \\ k \geq \frac{a}{4} \\ (2k+1)^2 \geq 1-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in (0; 3) \\ k \geq \frac{a}{4} \\ (2k+1)^2 \geq 1-a \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1° Если $a \leq 1$, то

$$(2k+1)^2 \geq 1-a$$

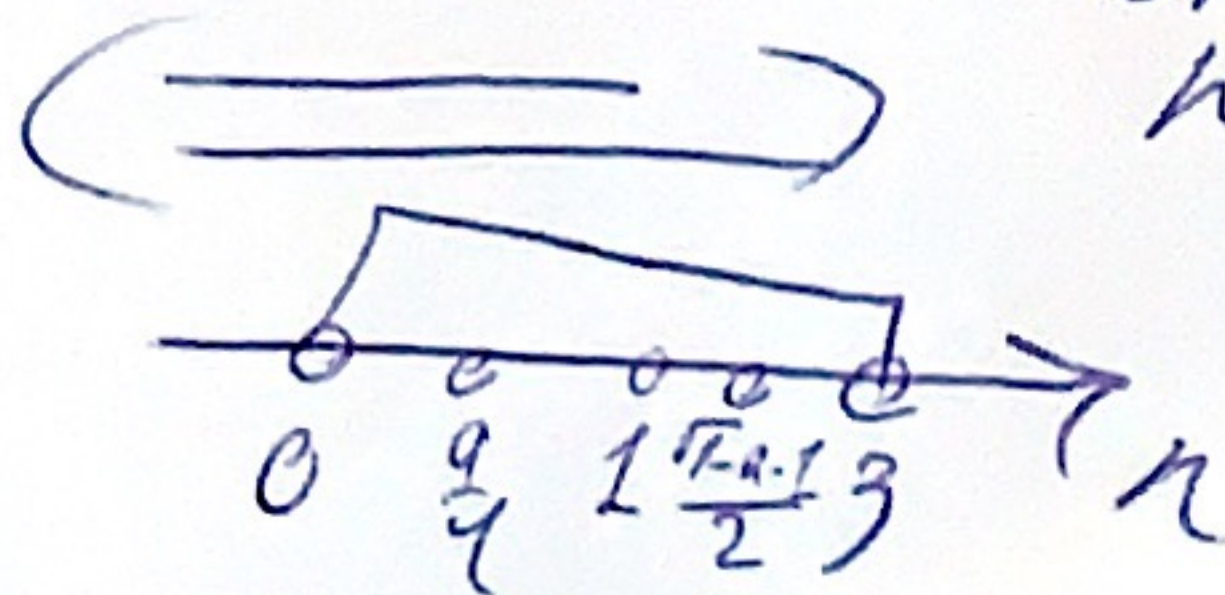
$$\begin{cases} 2k+1 \geq \sqrt{1-a} \\ 2k+1 \leq \sqrt{1-a} \end{cases}$$

т.к. $k \in (0; 3)$,

$$2k+1 \geq \sqrt{1-a}$$

$$\begin{aligned} 2k &\geq \sqrt{1-a} - 1 \\ 2k &\geq \sqrt{1-a} - 1 \\ k &\geq \frac{\sqrt{1-a} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} k \in (0; 3) \\ a \leq 1 \\ k \geq \frac{a}{4} \\ k \geq \frac{\sqrt{1-a} - 1}{2} \end{cases}$$



и тогда решение
первое. Все промежуток
равный 1, то
 $3 - \frac{\sqrt{1-a} - 1}{2} = 1$
 $\frac{\sqrt{1-a} - 1}{2} = 2$

411

Четован

$$\sqrt{1-a} - 1 = 4$$

$$\sqrt{1-a} = 5$$

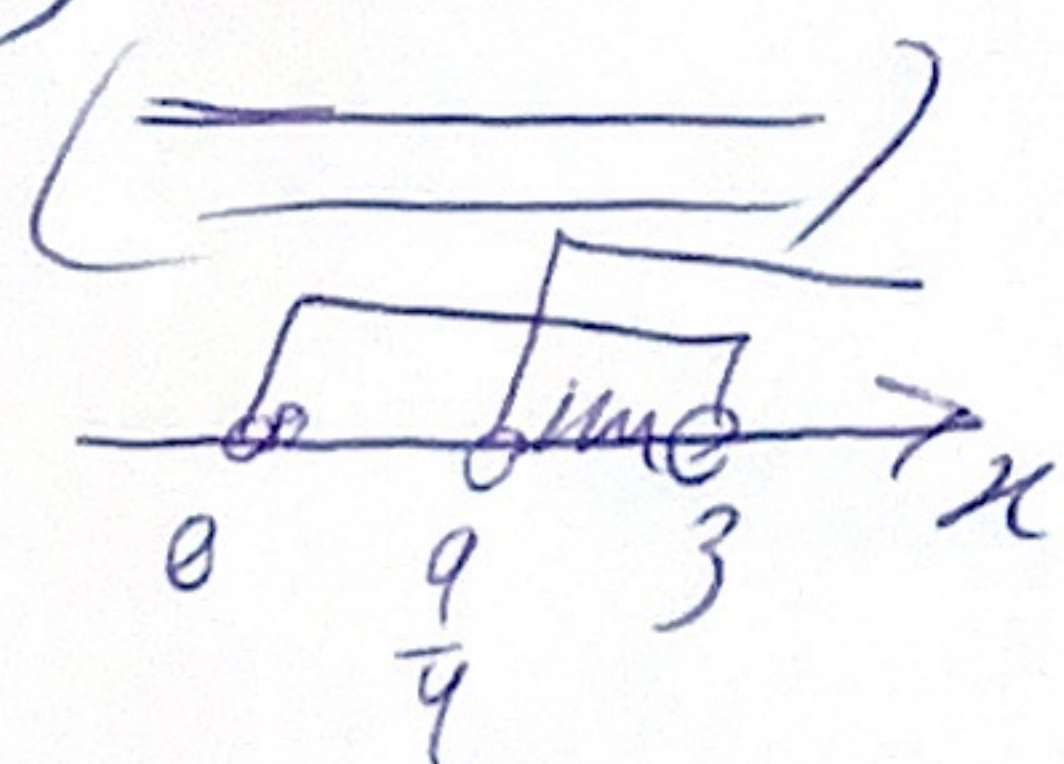
$$1-a = 25 \quad 1-a = 25$$

$$\underline{1-a = 26} \quad -a = 24$$

$$\underline{a = -24}$$

2° Если $a \geq 1$, то $(2n+1)^2 \geq 1-a$ - при таких a и n

$$\begin{cases} n \in (0, 3) \\ n \geq \frac{a}{4} \end{cases}$$



чтобы равенство
пер-ва был равенство
равно 1, то

$$3 - \frac{a}{4} = 1$$

$$-\frac{a}{4} = -2$$

$$\frac{a}{4} = 2$$

$$\underline{a = 8}$$

Ответ: $a = 8; -24$

Чистовик

23

Dano:

АВС — равнобедренный вписанный
 $AB = BC = CA$

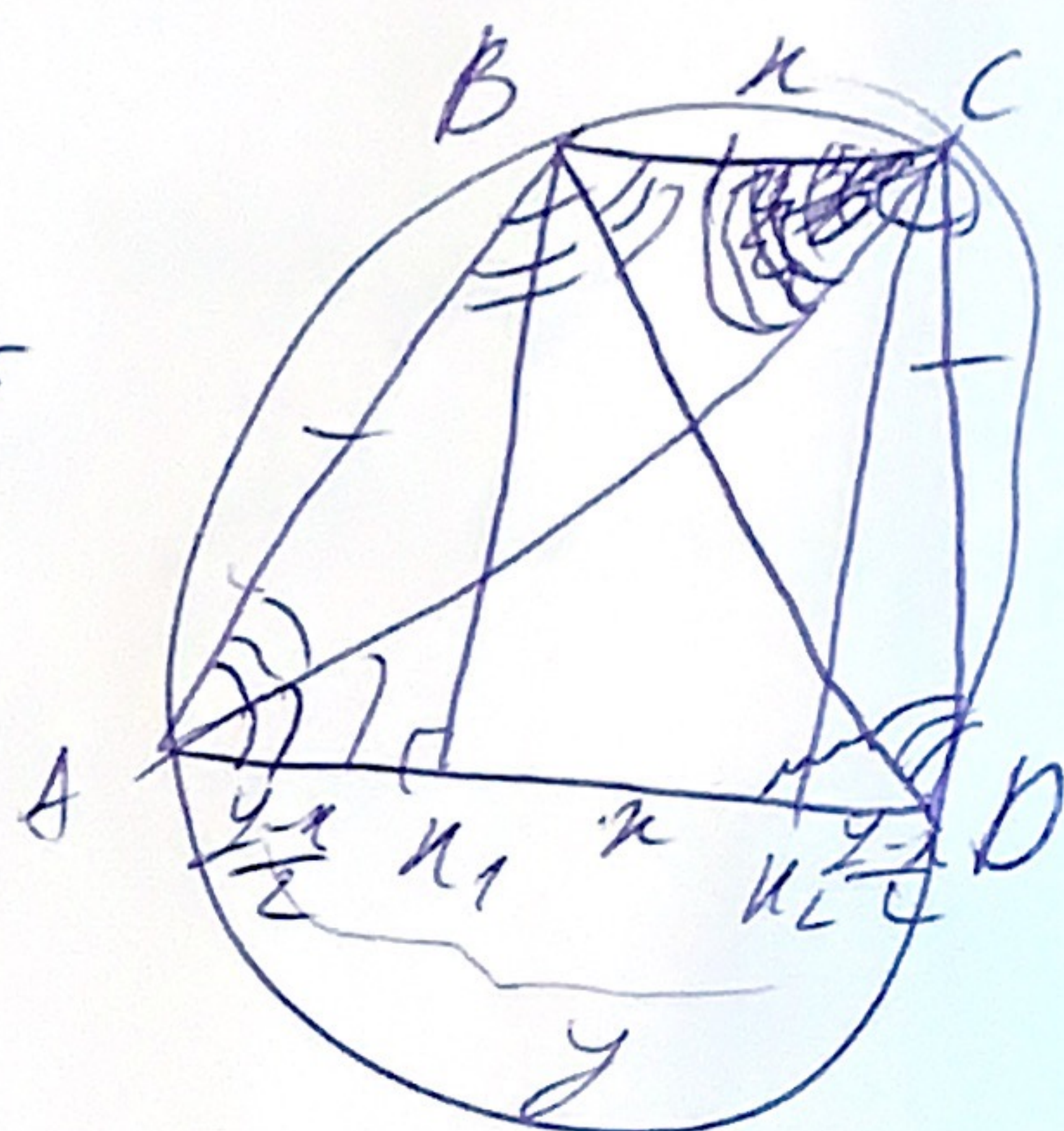
$$AB = BC = CD$$

$AB, BC, CD, AD, AC, PB \in \mathbb{E}_N$

Равно-мин

$\text{Aut}(G; R_2)$ - скручиваю

kar mu: R-2



Review:

Решение:

1) $\angle ABR = \angle ACR$ — вписанные и опираются на одну дугу

$\angle C) \Rightarrow \text{т.к. } AB = BC = CD \Rightarrow \angle AB = \angle BC = \angle CD \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BAC = \angle CAD = \angle APB = \angle CPB = \angle PBC = \angle PCA$
 (вписаны и сравнены на ~~одинаковые~~ одинаковые дуги)
 т.к. $\angle AABP = \angle PCP = \dots$

т.к. $\angle AABP = \angle BCP \Rightarrow AP \parallel BC$ (т.к. $\angle ABP$ и $\angle BCP$ — соответственные)

$\angle ABR$ и $\angle BCD$ и $\angle y$

[illegible]

3) Опустим высоту BK_1 и CK_1 ($BK_1 = CK_1$)
 Пусть $BC = AB = CD = x$

Циркуль $BC = AB = CD = R$

$$AB = y - \cancel{2(3\pi y)} = 3\pi y \text{ (т.к. } AB + BC + CD = AB)$$

13

Шматович

4) $K_1 K_2 = BC = n$ (св-во прб трапеции)

$AK_1 = DK_2 = \frac{y-n}{2}$ (св-во прб трапеции)

5) т.к. ABCD - прб трапеция, то AC - диаметр = $2r$

6) радиус AK_2

$AK_2 = AK_1 + K_1 K_2 = n + \frac{y-n}{2} = \frac{n+y}{2}$

7) найдем CK_2 из $\Delta CK_2 D$

по теореме Пифагора

$CK_2^2 = CD^2 - DK_2^2$

$CK_2 = \sqrt{n^2 - \frac{y^2 - 2ny + n^2}{4}}$

и ~~AK_2~~

ΔACK_2

по теореме Пифагора:

$AC = 2r$

$2r^2 = n^2 - \left(\frac{y-n}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+y}{2}\right)^2$

$2r^2 = n^2 + \frac{y^2 - 2ny + n^2 + n^2 + 2ny + y^2}{4}$

$2r^2 = n^2 + \frac{2n^2 + 2y^2}{4}$

$2r^2 = n^2 + \frac{2n^2 + 2y^2}{4}$

и

114

Четовик

2)

~~Сам~~
$$\begin{cases} Z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ y \geq 2 \\ 3n \geq 9 \end{cases}$$

8) Найти миним. значение Z и y при

условии

$$\begin{cases} Z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 3n \geq 9 \\ x \in \mathbb{R} \\ y \in \mathbb{R} \\ Z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

где $n=1$,

а) $y=2 \Rightarrow C = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \in \mathbb{R}$

~~б) $y=1 \Rightarrow C = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$~~

в) где $n=2$

~~а) $y=1 \Rightarrow C = \sqrt{4+2} = \sqrt{6} \in \mathbb{R}$~~

~~б) $y=2 \Rightarrow C = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \in \mathbb{R}$~~

в) где $n=3$

~~а) $y=1 \Rightarrow C = \sqrt{10} \in \mathbb{R}$~~

~~б) $y=2 \Rightarrow C =$~~

~~в) $y=3 \Rightarrow C =$~~

а) $y=3 \Rightarrow C = \sqrt{10} \in \mathbb{R}$

б) $y=4 \Rightarrow C = \sqrt{12} \in \mathbb{R}$

в) $y=5 \Rightarrow C = \sqrt{14} \in \mathbb{R}$

4 15

уелову

III) $x=3$

~~a) $y=1$~~

~~b) $y=2$~~

~~c) $y=3$~~

2) $y=4 \Rightarrow z = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$

3) $y=5 \Rightarrow z = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$

4) $y=6 \Rightarrow z = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{N}$

IV) $x=4$

~~a) $y=5$~~

~~b) $y=6$~~

~~c) $y=7$~~

~~d) $y=8$~~

V) $x=4$

~~$y=5 \Rightarrow z = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$~~

$y=5 \Rightarrow z = \sqrt{25} = 5 \in \mathbb{N}$

$P_{ABCD} = 4+4+4+5 = 17$ - кан периметр на

~~система уравнений $x+y+z=17$ кан~~

$\begin{cases} x+y+z=17 \\ x^2+y^2+z^2=15 \end{cases}$

$\triangle ABC$

a) $P_{ABC} = 5+4+6 = 15$

$r_{ABC} = \frac{15}{2} = 7,5$

b) $S_{ABC} = \sqrt{\frac{15}{2} \left(\frac{15}{2} - 5 \right) \left(\frac{15}{2} - 4 \right) \left(\frac{15}{2} - 6 \right)} = \sqrt{105 \cdot 2,5 \cdot 3,5 \cdot 1,5} = \sqrt{152,8125}$

c) $R_{ABC} = \frac{15}{2 \cdot \sqrt{152,8125}} = \frac{15}{2 \cdot 12,36} = \frac{15}{24,72} = 0,607$

116

универс

$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{(AB \cdot BC \cdot AC)}{4} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{\sqrt{1575}} = \\ &= \frac{5 \cdot 4 \cdot 6}{\sqrt{1575}} = \frac{120}{\sqrt{1575}} = \frac{120}{43.5} = \\ &= \frac{8}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

ответ: $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

11

сервоук

12

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) \\ -1 \leq x-1 \leq 1 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{4\cos 50^\circ + 4\sqrt{3}\cos 40^\circ}{16\cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right) \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cancel{2}\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{2(\cos 90^\circ + 2\cos 10^\circ)}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sqrt{3}\sin 40^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{2\cos(40^\circ - 30^\circ)}{2\cos 10^\circ}\right) \\ x \in [0, 2] \end{cases}$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{2\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right) \end{cases}$$

12

рекуррент

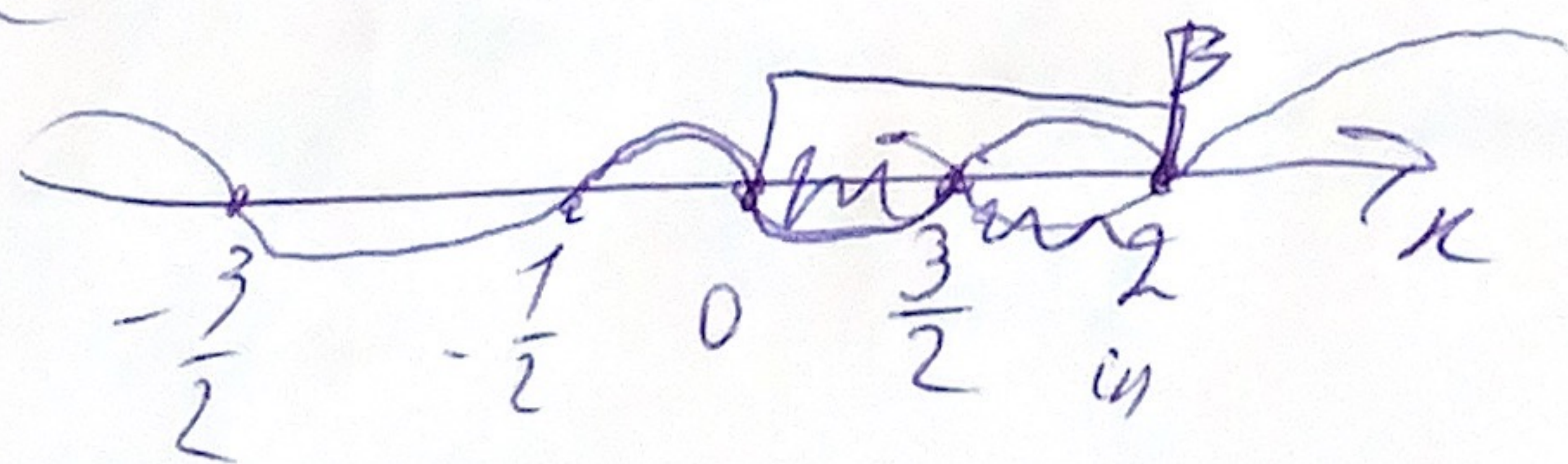
$$(\Rightarrow) \begin{cases} n \in [0; 2] \\ 2n(4n^2 - 9) + (4n^2 - 9) \arccos(n-1) \leq \arccos(1) \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Leftarrow) \begin{cases} n \in [0; 2] \\ (4n^2 - 3)(2n+3)(2n+1) \arccos(n-1) \leq 0 \end{cases} \quad (\Leftarrow)$$

т.к. $\arccos(1) \in [0; \pi] =)$, что $\arccos(n-1)$ в точке $n=2$ даже нулем не является, то не меняет его знак, т.к. $\arccos(n-1) \neq 0$ при любых n

$$\begin{cases} n \in [0; 2] \\ (n - \frac{3}{2})(n + \frac{3}{2})(n + \frac{1}{2}) \arccos(n-1) \leq 0 \end{cases} \quad (\Leftarrow)$$

$$\left(\frac{\quad}{\quad} \right) \quad n \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$



$$n=0 \quad a_1 = \frac{40 \cdot 3}{2 \cdot 2}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$n=1 \quad \text{при } n \text{ чётном} \\ |a_n| \leq \frac{2022}{2021}$$

Черновик

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n - 1 + 1$$

$$Q_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$$

нужно $b_n = a_n - 1 < 1$ т.е. $a_n = \frac{4003}{2022}$

$$a_{1-1}'' = \frac{2021}{2022}$$

~~$$b_{n+1} = a b_n + 1$$~~

$b_{m_k} = b_n \cdot (m_k - 1) + 1$

$$\text{Ans } b_2 = b_1^3$$

$$b_3 = b_7^9$$

2021 71

Ч.м.з.

11

6, 7, ... 2027

2022

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ 45 \\ \hline 1225 \\ 80 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 46 \\ 146 \\ \hline 1246 \\ 1286 \\ \hline 84 \\ \hline 2116 \end{array}$$

max kбepo kенo бeг в змe пpe змe

480

2(4: 11- 45 f 17h 46 $\frac{2}{7}$ 2e22

$$= 93$$

$$2022 - 43 = 1979 - \# \text{ max } 2027$$

$$\begin{array}{r} -43 \\ \hline 1979 \end{array}$$

$\downarrow$
 Ma 2022# cra
 $2022\#48 = 2022 -$
 $\frac{48}{2022}$

14

Сери

у сери крби

max 12, m 13 72012

$$\begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 13 \end{array}$$

персис

мил 12

$$\begin{array}{r} 13 \\ 2192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

конс на кведрн 12

$$12 - 1 = 11 \quad m 13$$

$$\begin{array}{l} (2^3), (3^3), 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3 \\ (10^3), (11^3), (12^3) \end{array}$$

$$2022$$

$$2022 - 9 = 2013$$

$$2013$$

$$2013 + 9 = 2022$$

$$сум 2022$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 272 \end{array}$$

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

раскоре

$$4x^2 + 8x > 0$$

$$4x(x + 2) > 0$$

$$x \in (-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

15

Черновик

2) Раскрасим модуль со всеми координатами знаков

$$x^3 + 2x^2 + x + a$$

а) I ⊕ ⊕

$$x^3 + 2x^2 + x + a \text{ и } x^3 - 2x^2 + x - a \leq 4x^4 + 8x$$

$$2x^3 - 4x^2 - 6x + 2a \leq 0 \quad | :2$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + a \leq 0$$

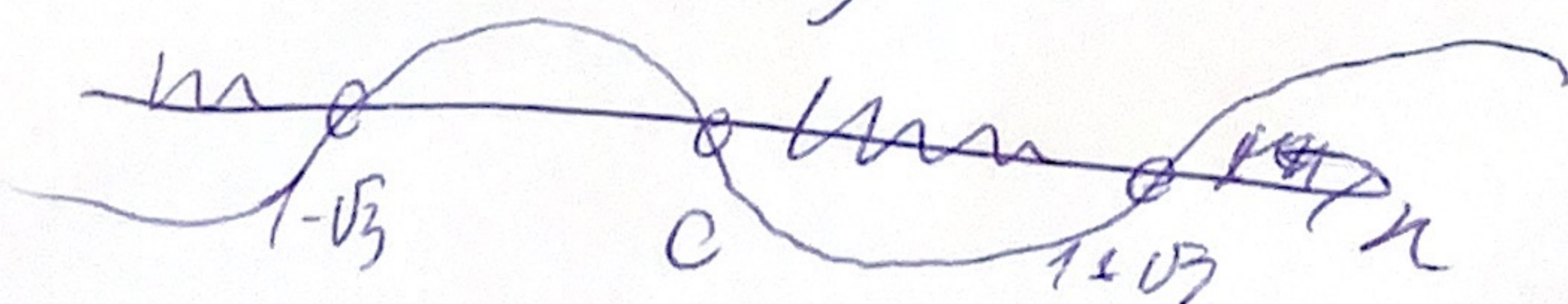
$$x(x^2 - 2x - 3) \leq 0$$

$$x(x - (1 + \sqrt{3}))(x - (1 - \sqrt{3})) \leq 0$$

$$D = 4 + 9 = 12$$

$$\sqrt{D} = 2\sqrt{3} \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup$$



$$x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (0, 1 + \sqrt{3}) \neq \text{отрезок}$$

равно 1

II ⊕ ⊖

$$x^3 + 2x^2 + x + a - x^3 + 2x^2 - x + a \leq 4x^4 + 8x$$

$$2x - 2a \leq 0$$

$$2x - 2a \leq 0$$

$$x \geq \frac{a}{2}$$

III ⊖ ⊕

$$-x^3 - 2x^2 - x - a \text{ и } x^3 - 2x^2 + x - a \leq 4x^4 + 8x$$

16

пробир

$$-4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x$$

$$8x^2 + 8x + 2a \geq 0 \quad | :2$$

$$4x^2 + 4x + a \geq 0$$

...

$$D = 16 - 4a \neq$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4a}}{4} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{4-a}}{2}$$

$$a \neq 1$$

$$a \leq 1$$

iii

⊕ ⊖ ⊖

$$-x^3 - 3x^2 - x - a - x^3$$

$$= -2x^3$$

$$+ 2x^3 - x + a < 4x^2 + 8x$$

$$2x^3 + 4x^2 + 10x \geq 0 \quad | :2$$

$$x^3 + 2x^2 + 5x \geq 0$$

$$x(x^2 + 2x + 5) \geq 0$$

- не пробир

3x1