МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Акулов Артём Олегович**
Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Акулов Артём Олегович

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

1) Черновик (5/6)

$\underbrace{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \dots\ 4049}_{4044}$

16 $\quad 256 \times 16 = 1536 + 256 = 4096$

$2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, \dots 15^3$

$15 \times 15 = 75 + 15 = 225$

2

$+7+9+11+13+15$ $\quad 62 \times 62 = 124 + 372 = 3844$ $\quad +62+63 = 125$

$225 \times 15 = 1125 + 225 = 3375$ $\quad 48^2 \quad 47 \times 47 = 329 + 188 = 2209$

$2x+$

$8 \cancel{2x^2}$

$4x^2(2x+1) - \cancel{3/2x}$ $\quad (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

3969 $\quad +63+64 = 127$

$2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11^3, 12^3, 13^3, 14^3, 15^3$

$24x^2 + 8x - 18$

$12x^2 + 4x - 9$ $\quad 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+108}}{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{112}}{12}$ $\quad (k+1)^3 - k^3 =$ $\quad 2^3 \quad 8, 27, 64, 125$

$1 \cdot ((k+1)^2 + (k+1)k + k^2) = 3k^2 + 3k + 1$

60 кв. 14 куб.

2 шест. степ.

$45^2 \quad 45 \times 45 = 225 + 180 = 2025$

12 кубов

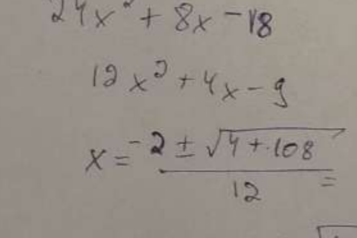
$a < c < 2a$

$a = 1$

$c^2 = k$ $\quad -1 \le x-1 \le 1$ $\quad 180 - 2\alpha > \alpha$ $\quad 121 \times 11 = 121 + 121$ $\quad 13 \quad 169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$\boxed{c^2 = ka}$ $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad \alpha < 60$

$4a + \frac{c^2}{a} - 2a = \boxed{2a+k} \to \min$ $\quad 0$ $\quad \cos\alpha = \frac{c}{2a}$



$\boxed{a \cdot 2\cos\alpha = d = c}$

$a \cdot 2\cos\alpha = c$ $\quad \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ $\quad 144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

$\frac{1}{4\cos 40} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40} =$

$c^2 < 4a^2$

$\boxed{c^2 = 3a^2}$ $= \frac{\sin 40 + \sqrt{3}\cos 40}{4 \sin 40 \cos 40} = \frac{2\sin(40+60)}{2\sin 80} =$

$\frac{c^2 : a}{\frac{c^2 - a^2}{a}}$ $\quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\quad \boxed{c^2 = 2a^2}$

$R - ?$ $\quad b = a + 2 \cdot a \cdot \cos 2\alpha$ $\quad = \frac{\sin 100}{\sin 80} = 1$

$2a(2 + 2\frac{c^2}{4a^2} - 1) \to \min$ $\quad 3a + b \to \min$ $\quad a(1 + 2\cos 2\alpha)$ "

$a(\frac{c}{a} - 1)(\frac{c}{a} + 1) \in \mathbb{Z}$ $\quad c - a : a$ $\quad a(4 + 2\cos 2\alpha) \to \min$ $\quad a(4\cos^2\alpha - 1) =$

$\frac{(c-a)(c+a)}{a} \in \mathbb{Z}$ $\quad c \quad c < 2a$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\quad = a(2\cos\alpha - 1)(2\cos\alpha + 1)$

$c + a : a$ $\quad c : a$ $\quad c < 2a$ $\quad c = a$ $\quad a(\frac{c}{a} - 1)(\frac{c}{a} + 1) \in \mathbb{Z}$

Черновик (6/6)

$a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$

$a_{n+2} = (a_n - 1)^9 + 1$

a

$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3n} + 1 \le \frac{2022}{2021}$

$\frac{1}{2021}$

2021

$\frac{4043^3}{2022^3} - 3 \cdot \frac{4043^2}{2022^2} + 3 \cdot \frac{4043}{2022} =$

$= \frac{4043^3 - 6066 \cdot 4043^2 + 3 \cdot 2022^2 \cdot 4043}{2022^3}$

$4043^3 + 3 \cdot 2022 \cdot 4043 \underbrace{(-4043 + 2022)}_{-2021}$

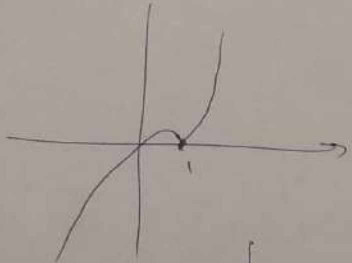
$+ 3 \cdot 2022 \cdot 4043 \cdot 2021$

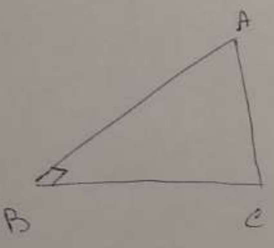
$\frac{4043(4043^2 - 3 \cdot 2021 \cdot 2022)}{2022^3} < \frac{2022}{2021}$

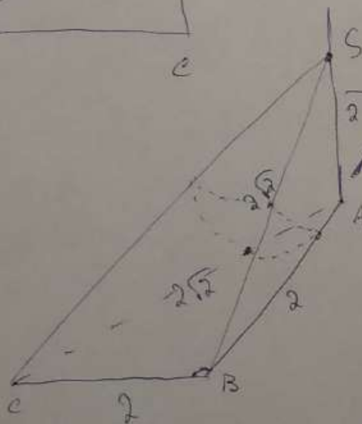
$2022^2 + 2021^2 - 2021 \cdot 2022 > 0$

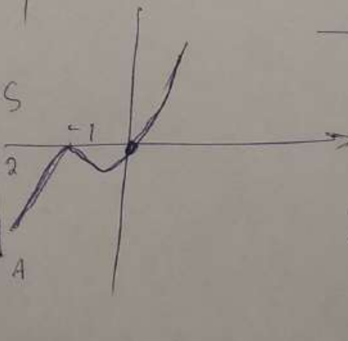
$2021 \cdot 4043 (2022^2$

$\underbrace{b}_{<a} \cdot \underbrace{(a+b)}_{<2a} \underbrace{(a^2 + b^2 - ab)}_{\substack{ab+1 \\ <a^2}} < a^4$









a

x

x^3

$f_1 < 0$

$f_2 < 0$

$-\cancel{2}x^3 - \cancel{2}x < \cancel{2}x^2 + \cancel{8}4x$

$\cancel{x^3 + 5}$ $x^3 + 2x^2 + 5x > 0$

$x(x^2 + 2x + 5) > 0$

0

$\begin{cases} x(x+1)^2 + a \\ x(x-1)^2 - a \end{cases}$

$f_1 > 0$

$f_2 > 0$

$\cancel{2}x^3 + \cancel{2}x < \cancel{4}2x^2 + \cancel{8}4x$

$x^3 - 3x$

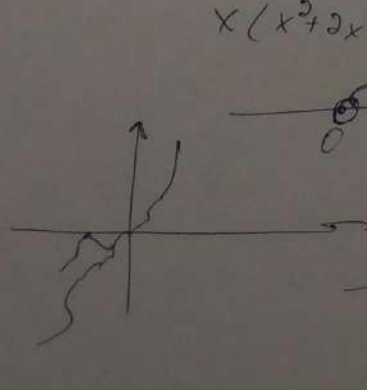
$x^3 - 2x^2 - 3x < 0$

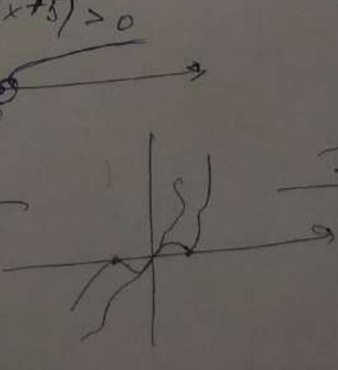
$x(x^2 - 2x - 3) < 0$

$x(x+1)(x-3) < 0$

− + − +

-1 0 3

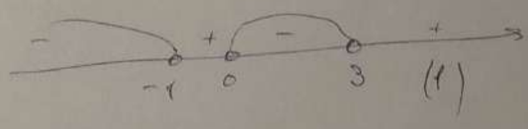




Чистовик (4/6)

б) Пусть f_1 - ~~вы~~ подмодульное выражение первого модуля, f_2 - второго. Если $f_1, f_2 > 0$, то

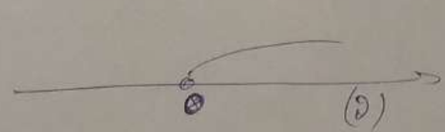
$$x^3+x<2x^2+4x \Rightarrow x(x^2-2x-3)<0 \Rightarrow x(x-3)(x+1)<0$$



Если же $f_1, f_2 < 0$, то

$$-x^3-x<2x^2+4x \Rightarrow x^3+2x^2+5x>0 \Rightarrow$$

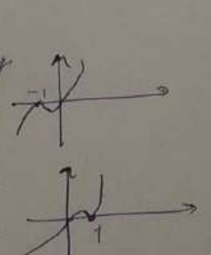
$$x(\underset{\vee \atop 0}{x^2+2x+5})>0$$



Т.е. пересечения решений нер-в $\begin{cases} f_1>0 \\ f_2>0 \end{cases}$ и (1) должны быть небольше отрезка ~~в 1.~~ длиной 1, и, аналогично с $\begin{cases} f_1<0 \\ f_2<0 \end{cases}$ и (2).

$f_1 = x(x+1)^2+a$

$f_2 = x(x-1)^2-a$

(

схематично, при $a=0$)

Сумма в левой части нер-ва ≥ 0, значит $4x^2+8x>0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$

Чистовик (3/6)

4) Из условия $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$

Из этого очевидно, что $a_k = (a_1 - 1)^{3^{k-1}} + 1$, например, по индукции.

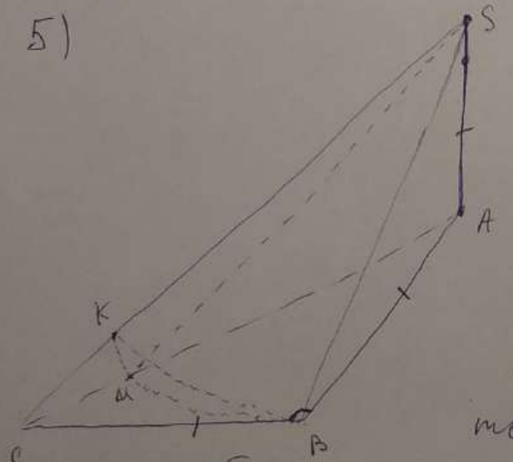
База: $a_2 = (a_1 - 1)^3 + 1$, $a_1 = (a_1 - 1)^{3^0} + 1$

Переход: $a_{k+1} = (a_k - 1)^3 + 1 = (a_1 - 1)^{3^{k-1} \cdot 3} + 1 = (a_1 - 1)^{3^k} + 1$

Значит надо найти такое n что $(a_1 - 1)^{3^{n-1}} + 1 \leq \frac{2022}{2021}$ или $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$. Поскольку $\frac{2021}{2022} < 1$, функция в левой части ограничена лишь нулём снизу, т.е. при огромных n нер-во будет верно.

Ответ: да

5)



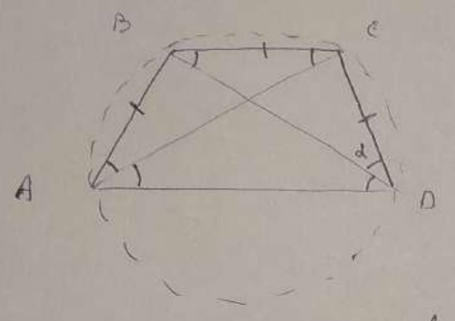
Поскольку (SAB) и $(SAC) \perp (ABC)$, то перпендикуляр из S, опущенный на AB и AC должен быть перпендикулярен (ABC), но это возможно лишь если он падает в A. Т.к. $\triangle SAB = \triangle ABC$, то $AC = R = SB$. Если $SK = SM = R$, то $AM = 2$

~~Площадь~~ Объём большей части есть сумма пирамиды с основанием - сектором окружности - $SABM$ и сектора сферы $SKMB$

$$S_{SAMB} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{\pi}{3} \qquad \angle SMA = 45^\circ$$

Если посчитать телесный угол этого сектора, то его объём $\frac{\Omega}{4\pi} \cdot 4\pi \cdot 2^2$

3) Чистовик (2/6)



Из равенства отрезков имеем $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle CDB = \angle BDA$ и из окружности $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle CAD = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle BDA$, т.е. все эти углы равны, а ABCD – равнобокая трапеция. (можно было сказать, что они все опираются на одинаковые дуги)

Тогда пусть $AC = BD = c$, $AB = BC = CD = a$, $AD = b$.
По условию $3a + b \to \min$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Имеем $\begin{cases} c = 2a \cdot \cos\alpha \\ b = a + 2 \cdot a \cdot \cos 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{c}{2a} \\ b = a(1 + 2(2\cos^2\alpha - 1)) \end{cases} \Rightarrow$

$b = a\left(4 \cdot \frac{c^2}{4a^2} - 1\right) = \frac{c^2}{a} - a$ (Из $\triangle ACD$ очевидно $c > a$, но при этом $c < 2a$)

$P = b + 3a = \frac{c^2}{a} + 2a$

В силу минимальности периметра можно считать $(a, b, c) = 1$, и пусть $c^2 = ka$, $k \in \mathbb{Z}$, $k > a$, $k < 4a$. $b = k - a$, $P = k + 2a$.
$k \perp a$, иначе $(a, b, c) \neq 1$. Но это просто значит, что k и a – квадраты (т.к. $c^2 = ka$). С учётом вышенаписанного $a \neq 1$ ($k > 1$, $k < 4$), и минимальное $a = 4$, k при этом $4 < k < 16$, т.е. $k = 9$. $b = 9 - 4 = 5$ и т.к. это минимальные значения a и k, то периметр минимален и равен $9 + 8 = 17$. Итак, у равнобокой трапеции ~~бо~~ стороны и меньшее основание равны по 4, большее основание 5, а радиус описанной окружности $R = \frac{a}{2\sin\alpha} =$

$= \frac{a}{2\sqrt{1 - \frac{c^2}{4a^2}}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - c^2}} = \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 16 - 9 \cdot 4}} = \frac{16}{2\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$

Ответ: р/б трапеция со сторонами 4, основаниями 4 и 5, и радиусом оп. окружности $\frac{8}{\sqrt{7}}$

1) 11 − 1 Чистовик (1/6)

(т.е. в первых 2022 элементах)

До числа 2027 в последовательности имеется 43 квадрата (от 3^2 до 44^2, т.к. $45^2=2025$) и 11 кубов (от 2^3 до $12^3<2027$, $13^3=2197$), причём шестых степеней среди них ровно две: $\underset{8^2}{\overset{}{4^3}}$, $\underset{27^2}{9^3}$. Значит, всего их $43+11-2=52$.

Однако после 2027 в 52 числах нет кубов и квадратов ($46^2=2025+45+46=2116$). Значит, на 2022 месте стоит $2027+52=2079$

Ответ: 2079

2) Преобразуем аргумент правой части:

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\cos 50^\circ}=\frac{1}{4\cos 40^\circ}+\frac{\sqrt3}{4\sin 40^\circ}=\frac{\sin 40^\circ+\sqrt3\cos 40^\circ}{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ}=$$

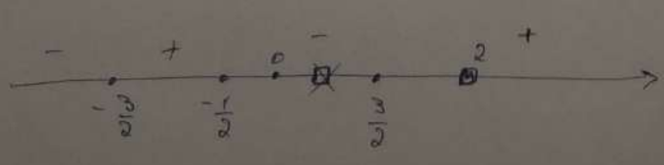
$$=\frac{2\sin(40^\circ+60^\circ)}{2\sin 80^\circ}=\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}=1$$

т.е. правая часть нер-ва есть $\arccos 1=0$

Скобка в левой части: $4x^2(2x+1)-9(2x+1)=(2x+1)(4x^2-9)=$ $(2x+1)(2x-3)(2x+3)$

А $\underset{\pi\ge}{\arccos}(x-1)\ge 0$ на ОДЗ $-1\le x-1\le 1 \Rightarrow 0\le x\le 2$

Итак $(2x+1)(2x+3)(2x-3)\arccos(x-1)\le 0$



Ответ: $x\in[0;\frac{3}{2}]\cup\{2\}$

б) Пусть f_1 – ~~вн~~ подмодульное выражение первого модуля, f_2 – второго. Если $f_1, f_2 > 0$, то

$$x^3+x < 2x^2+4x \Rightarrow x(x^2-2x-3)<0 \Rightarrow x(x-3)(x+1)<0$$

(1)

Если же $f_1, f_2 < 0$, то

$$-x^3-x<2x^2+4x \Rightarrow x^3+2x^2+5x>0 \Rightarrow$$

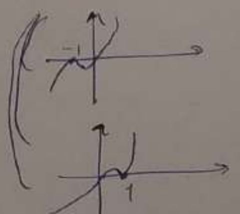
$$x(\underbrace{x^2+2x+5}_{>0})>0$$

(2)

Т.е. ~~в~~ пересечения решений нер-в $\begin{cases} f_1>0 \\ f_2>0 \end{cases}$ и (1) должны быть небольше отрезка ~~в 1.~~ длиной 1, и, аналогично с $\begin{cases} f_1<0 \\ f_2<0 \end{cases}$ и (2).

$f_1 = x(x+1)^2+a$

$f_2 = x(x-1)^2-a$



схематично, при $a=0$

Сумма в левой части нер-ва ≥ 0, значит $4x^2+8x>0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty)$