



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Минасян Глеб Лерментович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Минасян Глеб Лерментович

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	15 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	5 баллов	80 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Числовик Вариант 11-1
~2

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

Рассмотрим правую часть

$$\begin{aligned} \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) &= \arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ}{4\sin 50^\circ \cos 50^\circ}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ\right)}{4(\sin 50^\circ \cos 50^\circ)}\right) = \arccos\left(\frac{2\sin 80^\circ}{2\sin 100^\circ}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{\sin(180^\circ - 100^\circ)}{\sin 100^\circ}\right) = \arccos(1) = 0 \Rightarrow \text{имеем} \end{aligned}$$

Неравенство будет иметь вид:

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0$$

Разложим $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$:

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$x = \pm 3 \pm \frac{3}{2}$$

Заметим, что при $x = +\frac{3}{2}$ выражение $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$ обращается в 0:

$$8 \cdot \frac{(-27)}{8} + 4 \cdot \frac{9}{4} + 18 \cdot \frac{3}{2} - 9 = 0, \text{ тогда поделим на } (2x-3) \text{ выражение } 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$$

$$\begin{array}{r|l} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 & 2x - 3 \\ \underline{8x^3 - 12x^2} & \\ 16x^2 - 18x & \\ \underline{16x^2 - 24x} & \\ 6x - 9 & \\ \underline{6x - 9} & \\ 0 & \end{array}$$

$$4x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$D_1 = 16 - 4 \cdot 3 = 4 = 2^2$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm 2}{4} \\ x &= \frac{-4 + 2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x &= \frac{-4 - 2}{4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2}{4}$$

числовым

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

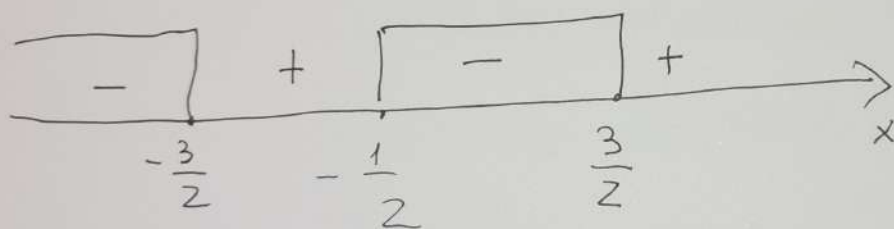
Следовательно теперь мы разложим выражение $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9$ на $8(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2})$ ~~и~~ вернемся к неравенству:

$$8(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) \arccos(x-1) \leq 0 \quad | :8$$

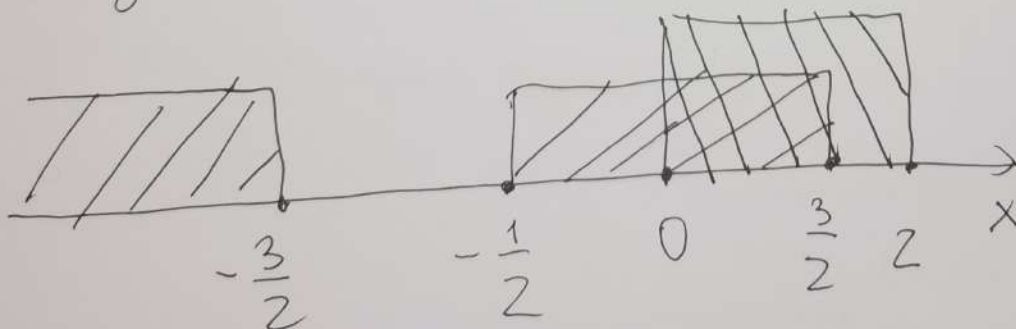
$$(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2}) \arccos(x-1) \leq 0.$$

$$ОДЗ: 0 \leq x \leq 2$$

Вспользуемся методом интервалов:



с учетом ОДЗ:



$$x \in [0; \frac{3}{2}]$$

$$\text{Ответ: } [0; \frac{3}{2}]$$

2

вернемся к неравенству:

Числовые

✓4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3$$

$$\text{Пусть } b_n = a_n - 1, \quad b_1 = a_1 - 1 = \frac{4043}{2022} - \frac{2022}{2022} = \frac{2021}{2022} < 1 \quad \rightarrow x$$

~~тогда как~~

$$\text{тогда } b_{n+1} = b_n^3, \text{ значит, } b_n = b_1^{3^{(n-1)}}$$

$$\text{Так как } b_1 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1,$$

это значит, что по определению предела найдётся такое N , что $|a_N| < 1 + \frac{1}{2021} = \frac{2022}{2021}$

Ответ: да ✓1

укажи $n+m$ чисел

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$n^2 < 2022 + n + m + 6 - 1$$

$$m^2 < 2022 + n + m + 6 - 1$$

$m < n$, значит, в первом числе можно решить.

$$n^2 < n + 2027 + m$$

3

вернемся к неравенству:

$$n(n-1) < 2027 + m \quad \text{числовые}$$

$$n_{\max} = 45 \text{ или больше}$$

Возьмем: $1, 4, 9, 16, 25, \dots, 2025$

$$m^3 - m < 2072, m < 13$$

Итак, возьмем $9, 16, 25, \dots, 2025$ это 43 числа
и $8, 27, 64, \dots, 12^3$ — это 11 чисел

То есть 54 числа суммарно, но числа 2^6 и 3^6
учтены 2 раза, значит, 52 числа

Посмотрим теперь:

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197$$

$$45^2 = 2025$$

$$46^2 = 2116$$

$$6, 7, 10 \dots, 6 + 2021 + 52 = 2079$$

Ответ: 2079

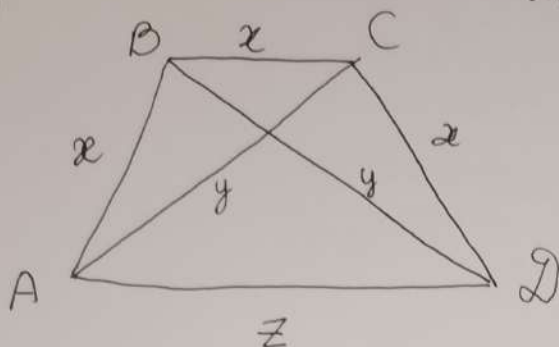
$$a_1 = \frac{40}{2022}$$

$$a_n = 3a^2n + 3a_n$$

$$1 = \frac{4043}{2022} - \frac{2021}{2022}$$

Числовик

~3



① Пусть $AB=BC=CD=x$, $AC=BD=y$, $AD=z$ ($AC=BD$ т.к. трапеция равноб. по условию)

② по т. Птолемея:

$$y^2 = x^2 + xz, \text{ минимиз. } 3x+z$$

③ из $\triangle BCD$: $y < 2x$ ④ из $\triangle ACD$: $z < y+x$

Рассмотрим случаи:

$x=1$, тогда $y^2 = 1+z$, выпишем первые решения $(2;3), (3;8)$, но они не год $z < x+y$, а так как

при росте y переменная z растёт быстрее, значит, не подойдут и все следующие решения.

$x=2$, тогда $y^2 = 4+2z$ первые решения $(4;6); (6;16)$ аналогично первому случаю они не подойдут и дальнейшие решения тоже.

$x=3$, тогда $y^2 = 9+3z$, $(6;9), (9;24)$, аналогично первому случаю они не подойдут и дальнейшие решения тоже.

$x=4$, тогда $y^2 = 16+4z$ $(6;5)$ - подходит $P = 12+5 = 17$

$x=5$ тогда $y^2 = 25+5z$ $(10;15)$ $P > 17$, а в дальнейшем ещё больше

$x \geq 6$, тогда $3x \geq 18$ $P \geq 18 \Rightarrow P = 17$.

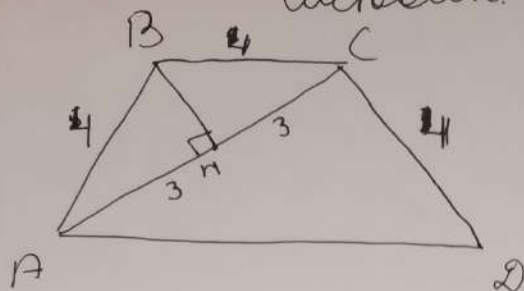
5

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^2 + 1$$

$$a_3 = \frac{2022}{2022} = \frac{2021}{2022}$$

Условие.



Проведем $BH \perp AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow AH = 3$ (т.к. $\triangle ABC$
 равнобедренный)

по т. Пифагора:

$$BH = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{7} = 3\sqrt{7}$$

$$R = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6^2}{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

$$a_1 = \frac{4043}{2022} \quad a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1 \Rightarrow$$

$$2022 = \frac{2021}{2022} \quad \angle 1$$

Числовик
~6

Заметим, что

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| \geq |x^3 + 2x^2 + x + a + x^3 - 2x^2 + x - a| =$$

$$= |2x^3 + 2x| \text{ т.к. } |y| + |x| \geq |x + y| \Rightarrow \forall a \text{ множество}$$

решений исходного неравенства находится в

отрезке $|2x^3 + 2x| \leq 4x^2 + 8x \Leftrightarrow 2x(x+1)(x-3) \leq 0$

или

$-2x(x^2 + 2x + 5) \leq 0$ при $x \leq 0$ — верно всегда

т.к. $x^2 + 2x + 5 > 0 \Rightarrow$ решения могут быть на

отрезке $[0; 3]$; при $x=3$ получим:

Заметим, что при $x=3$ получим:

$$|48 + a| + |12 - a|, \text{ а в другой части } 60 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $a \in [-48; 12]$ у графика обнуется точка

$x=3, y=60 \Rightarrow$ для этих a должна быть точка

$$\text{на } x=2 \text{ или } x=4.$$

$$118 + a + 12 - a = 32$$

$$|18 + a| + |12 - a| = 32$$

$$a = 8$$

$$a = -24$$

$$|100 + a| + |136 - a| = 96 \text{ нет р-ий т.к. л.ч. } \geq 136$$

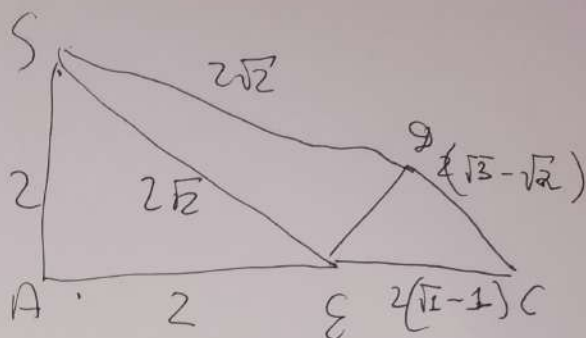
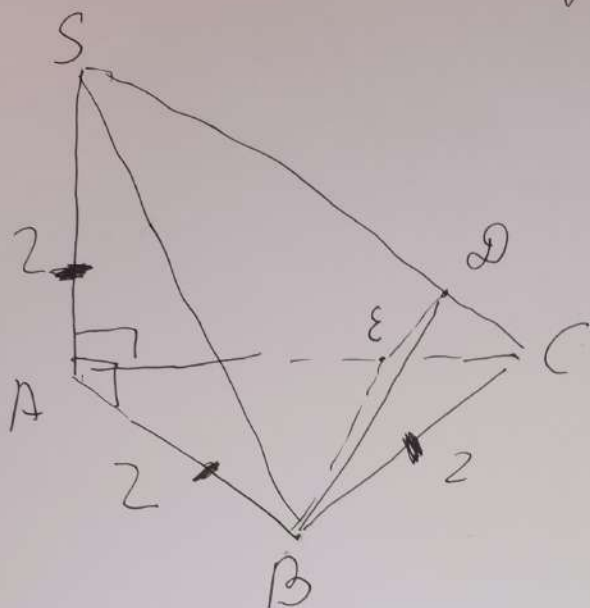
$x^3 + 2x^2 + x + a \geq 0$ и $x^3 - 2x^2 + x - a \leq 0$ на отрезке

от $[0; 3] \Rightarrow$ т.к. $4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x$, что не выполняется при

$x \in [0; 3]$ при $a < -48$

7

Число
5



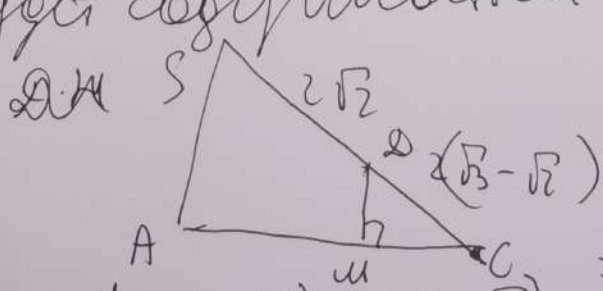
① по теореме Пто ТТП имеем $SB \perp BC \Rightarrow$

$$\Rightarrow SB = AC = 2\sqrt{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{3}$$

② Пусть сфера касается SC в D, AC в точке E тогда $AE = DE = SE = R = \frac{AC}{2} = \sqrt{2}$, $CD = 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $CE = 2(\sqrt{2} - 1)$, $AE = 2$

③ $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$

④ Из того, что $(ABC) \perp (SAC)$, то ДМ будет соединяться в (SAC) $\triangle SAC \sim \triangle DMH$



$$DM = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{6})}{3}$$

$$V_{SBCDE} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{BCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{6})}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{9} (12 - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{6}) \Rightarrow$$

g) $= \frac{1}{3} \cdot (2 - \sqrt{2}) \cdot \frac{2(3 - \sqrt{6})}{3}$

$$V_{\text{max}} = V_{\text{ABC}} - V_{\text{DBCE}} = \frac{4}{3} - \frac{1}{8} (12 - 6\sqrt{2} - 4\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) =$$

$$= \frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{8}$$

Orber: $\frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{6} - 4\sqrt{3}}{8}$

Черновик.

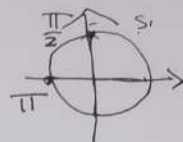
урагу

$$\sqrt{2} (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} \right)$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$8 \quad 4 \quad -18 \quad -9$$

2



$$8 \cdot \frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1}{4(\frac{\pi}{2} - 50^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ} = \frac{1 \cos 50^\circ + \sqrt{3} \sin 50^\circ}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{2 \left(\frac{1}{2} \cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 50^\circ \right)}{2 \sin 100^\circ} = \frac{2 \sin(30^\circ + 50^\circ)}{2 \sin 100^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ}{2 \sin 100^\circ}$$

$$= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 100^\circ)}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin(\pi - 100^\circ)}{\sin 100^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 100^\circ} = 1.$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$8x^3(x+2) - 9(2x-1) = 0$$

$$x(8x^3 + 4x - 18) - 9 = 0$$

1

Черешки x_2

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$(2x-3)^2 \neq 0$$

$$8 \cdot \frac{8}{27} + 4 \cdot \frac{4}{9}$$

$$(2x)^3 - 3 \cdot 2x^2 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \quad | \quad 2x-3 \\ 8x^3 - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \quad | \quad 2x-3 \\ 8x^3 - 12x^2 \quad | \quad 4x^2 \\ \hline 12x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \quad | \quad 2x-3 \\ 8x^3 + 12x^2 \quad | \quad 4x^2 + 8x + 3 \\ \hline 16x^2 - 18x \\ 16x^2 - 24x \\ \hline 6x - 9 \\ 6x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

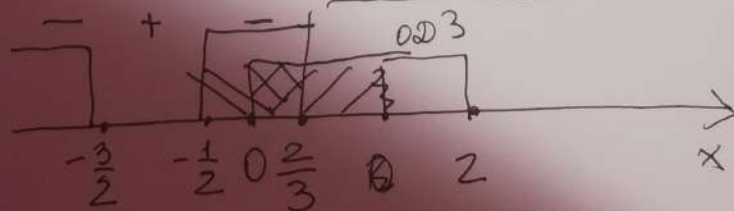
$$\begin{array}{r} 4x^2 + 8x + 3 \quad | \quad 2x+3 \\ 4x^2 + 6x \quad | \quad 2x+1 \\ \hline 2x+3 \\ 2x+3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x+3=0 \quad 0. \quad 2x+1=0$$

$$(2x+3)(2x-3)(2x+1) \arccos(2x-1) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$x \in [0, \frac{2}{3}]$$



Чертёж

Знают $P=17$.

Проблем BH ⊥ AC.

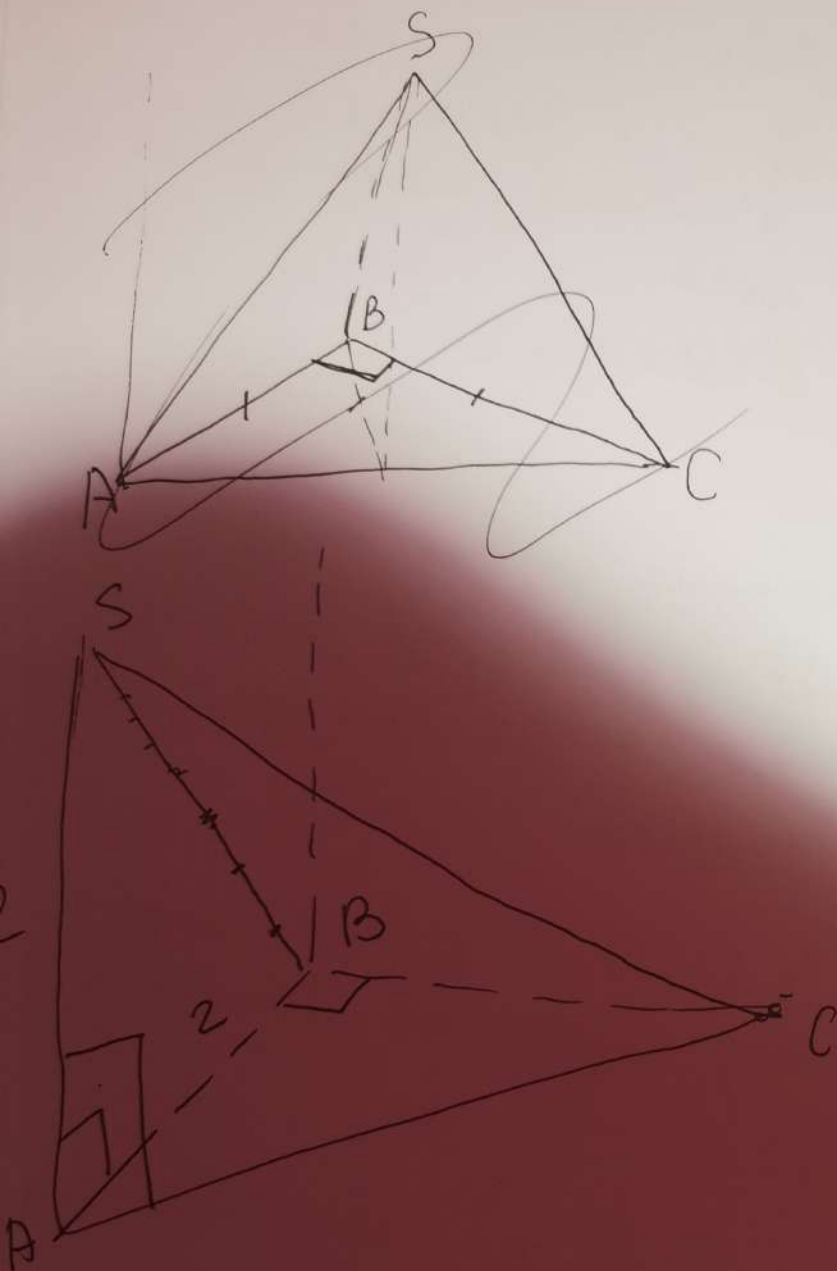
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$S_{ABC} = 3\sqrt{7}$$

$$R = \frac{x \cdot x \cdot y}{4 \cdot S_{ABC}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6^2}{4 \cdot 3\sqrt{7}} =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6^2}{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

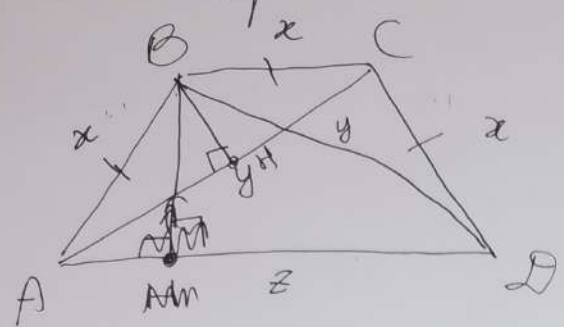
Ответ: $\frac{8\sqrt{7}}{7}$.



$$2^3 = 8$$

$$3^2 = 9$$

Черновики.



Пусть:

$$AB = BC = CD = x$$

① $AC = BD = y, AD \perp z$

② по т. Птолемея
 $y^2 = x^2 + xz$, минимум $3x + z$

необходимое условие: $z < x + y$

Реш: $y < 2x$

$x=1$, тогда $y^2 = 1 + z$, выпишем первые решения: $(2; 3), (3; 8), \dots$, но они не угод. $z < x + y$, так как при росте y переменная z растет быстрее, значит не подойдут и все следующие.

$x=2$, тогда $y^2 = 4 + 2z$, $(4; 6), (6; 16)$ но они аналогично предыдущему случаю также не смогут пройти.

$x=3$, тогда $y^2 = 9 + 3z$ $(6; 9), (9; 24)$, аналогично первой аналогично решения не будут подходить.

$x=4$, тогда $y^2 = 16 + 4z$ $(6; 5) -$ не подходит $P=12+5=17$.

$x=5$, тогда $y^2 = 25 + 5z$ $(10; 15) P=10+5=15$, а дальше еще больше.

~~или $x=6$ и $x > 6$ $x \geq 6, 3x \geq 18, P \geq 18$~~

Ч
 В
 Ам
 ходи
 у < 2
 по
), 1:
 по
 год
 по
 м
 он
 по
 у
 7
 = 1
 x
 4
 4

Черновик. ~1

угадаем $n+m$ чисел

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$n^2 < 2022 + n + m + 6 + 1$$

$$m^3 < 2022 + n + m + 6 + 1$$

$m < n$, поэтому в угадываемых числах

$$n^2 < n + 2027 + m$$

$$n^2 - n < 2027 + m$$

$$(n-1)n < 2027 + m$$

$n_{\max} = 45$ или больше.

Вот варианты:

1, 4, 9, 16, 25, ... 2025

$$m^3 - m < 2022, m < 13$$

Итак, угадаем 9, 16, 25, ..., 2025 это 43 числа
 а также 8, 27, 64, ..., 12³ - это 312 11 чисел.

То есть 54 числа суммарно

Посмотрим теперь надо ли что-то еще
 угадать. 2⁶, 3⁶ угаданы 2 раза $\Rightarrow$ у нас 52
 числа.

$$12^3 = 1728, 13^3 = 2197$$

$$45^2 = 2025, 46^2 = 2116$$

$$6, 7, 10, \dots, 6 + 2021 + 52 = 2079$$

Ответ: 2079.

$$\begin{array}{r} \times 124 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 17728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 45 \\ 45 \\ \hline 225 \\ 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 46 \\ 46 \\ \hline 276 \\ 1864 \\ \hline 1496 \end{array}$$

Черезевин.
Черезевин 1 страница

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x - 1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ}\right)$$

Рассмотрим правую часть

$$\arccos\left(\frac{1}{4 \cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4 \sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4 \cos 50^\circ}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot \cos 50^\circ + \sqrt{3} \cdot \sin 50^\circ}{4 \sin 50^\circ \cos 50^\circ} = 2$$

~4

$$a_1 = \frac{4043}{2022}, a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1 \Rightarrow a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3$$

$$\Rightarrow (a_{n+1} - 1)^3 = a_{n+1} - 1 = (a_n - 1)^3$$

$$\text{Пусть } b_n = a_n - 1 \Rightarrow b_1 = a_1 - 1 = \frac{4043}{2022} - \frac{2022}{2022} = \frac{2021}{2022} < 1$$

$$\text{Тогда } b_n^3 = b_{n+1}, \text{ значит } b_n = b_1^3$$

$$\text{т.к. } b_1 < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$$

$\Rightarrow$ по определению предела найдется такое n , что $|a_n| < 1 + \frac{1}{2021} =$

$$= \frac{2022}{2021}$$

Ответ: да.

3

x = 5, ...

нужно
 $x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0$ и $x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0$ на отрезке $[0; 3]$

$\Rightarrow \begin{cases} -(4x^2 + 2a) < 4x^2 + 8x \\ \text{и} \end{cases}$ не выполняется
 и $\Rightarrow$ находим: $a = 8$
 $a = -24$

Ответ: $\{8; -24\}$