МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Волкова Софья Алексеевна**
Класс: **7-8**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Волкова Софья Алексеевна

Класс: 7-8

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
15 баллов	15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Чистовик. 1.

$\boxed{№1}$ Расположим жителей острова в порядке убывания кол-ва собранных бананов и кокосов.

Бананы: o o o o o o o o o .....

Кокосы: o o o o o o o o o .....

Рассмотрим первое утверждение. Из него следует, что первые 6 по кол-ву собранных бананов – рыцари, каждый из них сказал правду – «Нет 6 жителей, которые собрали бананов больше, чем я». Все остальные – лжецы, они солгали.

Рассмотрим второе утверждение. Из него следует, что первые 7 по кол-ву собранных кокосов – лжецы, они сказали ложь, ведь не найдётся 7 жителей, которые собрали больше кокосов. Все остальные – рыцари, они сказали правду.

Теперь наша схема выглядит так:

Бананы: Р Р Р Р Р Р Л Л Л Л Л Л Л Л Л Л .....

Кокосы: Л Л Л Л Л Л Л Р Р Р Р Р Р Р Р Р .....

Количество Р и Л и в том и в другом ряду должно быть одинаково. Это значит, что у нас должно быть 6 Р и 7 Л в каждом ряду:

Бананы: Р Р Р Р Р Р Л Л Л Л Л Л Л

Кокосы: Л Л Л Л Л Л Л Р Р Р Р Р Р

Меньше или больше жителей мы сделать не сможем – возникнет противоречия в кол-ве рыцарей и лжецов. => это единственный вариант решения.

<u>Ответ</u>: могло, на острове 6 рыцарей и 7 лжецов.

$\boxed{№2}$ Обозначим кол-во работников за x, их производительность v_x, время рабочего дня – t, а кол-во грядок, вскопанных за второй день – G.

Составим уравнения:

$$\begin{cases} \overbrace{\cancel{\frac{t}{v_x}}\cdot x}^{t\cdot v_x\cdot x} = 10 \\ \overbrace{\cancel{\frac{\frac{1}{2}t}{v_x}\cdot 7}}^{\frac{t}{2}\cdot v_x\cdot 7} = G \end{cases} \Rightarrow \cancel{\frac{\frac{tx}{v_x}}{\frac{7t}{2v_x}} = \frac{10}{G}} \Rightarrow \frac{\cancel{t}x\cdot 2\cancel{v_x}}{\cancel{v_x}\cdot 7\cancel{t}} = \frac{10}{G} \Rightarrow \frac{2x}{7} \times \frac{10}{G} \Rightarrow \begin{matrix} 70 = 2x\cdot G \\ 35 = x\cdot G \end{matrix}$$

Согласно основной теореме арифметики, числа 35 и $x\cdot G$ раскладываются на множители одинаково. Причём, у нас есть условие: $x \geq 7$ (т.к. хотя бы один работник заболел) и $G<10$ (т.к. время работы и кол-во работников меньше, а производительность осталась та же, то результат работы стал меньше).

35 можно разложить, как:

$5\cdot 7$ – не подходит под условие $x>7$.

$35\cdot 1$ – подходит и является единственным верным.

Значит: $x=35$, $G=1$.

Кол-во грядок $= 10 + G = 10+1 = 11$

<u>Ответ</u>: всего было 11 грядок.

Чистовик 2. №3

$(\overline{abc} - \overline{acb}) \vdots 72$

Числа, кратные 72: 72, 144, 216, 288 ... и т.д. Но в нашем случае разностью двух чисел может равняться только двухзначное число:

$$\begin{array}{r} -\,abc \\ acb \\ \hline 072 \end{array} \leftarrow \text{двухзначное число.}$$

Значит, разность = 72, и получить мы её должны в результате вычитания $\overline{cb}$ из $\overline{bc}$.

$\boxed{\text{Пример: } \begin{array}{r} -\,bc \\ cb \\ \hline 72 \end{array}}$

Получить 7 в разряде десятков можно тремя способами:
1. Из числа 9• вычесть 2• (• – цифра)
2. Из числа 8• вычесть 1•
3. Из числа 7• вычесть 0•
4. Из числа 9• вычесть 1• (единица из десятков будет занята в предыдущий разряд)
5. Из числа 8• вычесть 0•

А поскольку буквами b и c обозначаются одинаковые числа, мы можем восстановить примеры:
1. 92 – 29 = 63
2. 81 – 18 = 63
3. 70 – 7 = 63
4. 91 – 19 = 72
5. 80 – 8 = 72
) подходят.

Теперь посчитаем кол-во пар таких чисел:
На месте буквы a могут стоять числа от 1 до 9 – всего 9 чисел. На каждое из двух этих чисел приходится 2 комбинации b и c: 91/19 и 80/08. Всего: 9 · 2 = 18 ~~чисел~~ пар чисел.

Но разность может быть и отрицательной. Пар чисел, которые при вычитании дают –72, тоже 18 (просто b и c меняются местами). Таким образом, если условие задачи подразумевает рассмотрение отрицательной ~~разницы~~ разности, то кол-во всего пар чисел равно 18 + 18 = 36.

Ответ: таких чисел 36 (если рассматривать отрицательные разности, если не рассматривать – 18 чисел)

Чистовик 3.

$\boxed{№4}$ $(x+y)\cdot(x+y+1)+2y=100$

$x^2+xy+x+xy+y^2+y+2y=100$

$(x^2+2xy+y^2)+x+y+2y=100$

$(x+y)^2+(x+y)+2y=100$

Т.к. x и $y>0$, то $(x+y)^2<100$:

$(x+y)^2=9^2;\ 8^2;\ 7^2;\ 6^2 \dots 1^2$

Подставим:

Если $(x+y)^2=9^2$:

$9^2+9+2y=100$

$2y=10$

$y=5 \Rightarrow x=9-5=4$

Если $(x+y)^2=8^2$

$8^2+8+2y=100$

$2y=\cancel{8}28$

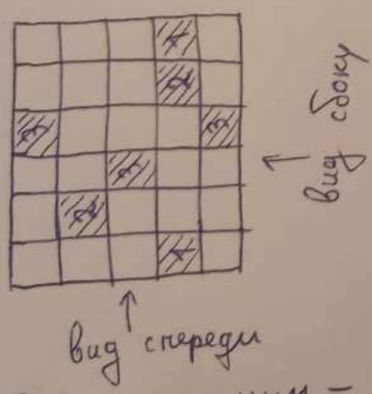
$y=14 \Rightarrow x=8-14=-6$ — противоречие, т.к. x - натуральное.

Аналогичная ситуация будет происходить при дальнейшем подставлении $7^2, 6^2, 5^2 \dots$ Будет получаться, что $y>(x+y)$, что является противоречием.

<u>Ответ:</u> $x=4;\ y=5$.

$\boxed{№5}$ Рассмотрим вид спереди и заметим, что в постройке должно быть минимум 5 колонны из кубиков: 3 из 3 кубиков и 2 из 2. Иначе рисунок получится неверным. Рассмотрим вид сбоку и заметим, что нам ещё нужны 2 колонны из 1 кубика. Таким образом минимальное число колонн = $=5+2=7 \Rightarrow$ на виде сверху будет 7 кубиков минимум.

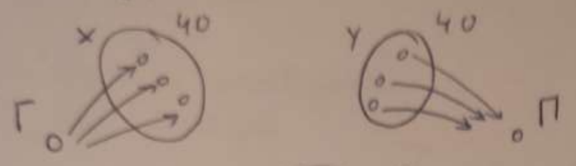
Это можно изобразить так (цифра — кол-во кубиков в колонне):



<u>Ответ:</u> минимум — 7 кубиков.

Чистовик 4. $\boxed{№6}$

Обозначим планеты на которые можно попасть с планеты Галатея-37 как „планеты x", а планеты с которых можно попасть на Пандору – „планеты y". Оставшиеся – „планеты z".



Теперь рассмотрим следующие ситуации:

1. Пандора находится во множестве x, а Галатея-37 в y. Итог: 1 прыжок.
2. На Пандору нельзя попасть сразу с планеты Галатея-37.

Тогда рассмотрим планеты x.
~~Среди них~~ Их 40 штук. (С каждой из них можно добраться до других 40
планет => (назову такие связи „исходящими") исходящих связей 40·40=1600.
Точно также 40·40=1600 входящих связей, но 40 таких связей у же есть
(с планеты Галатея-37) => входящих связей в планеты x = 1600 − 40 = 1560.
~~Кол-во вхо~~ Предположим, что множество x замкнутое, т.е. с планет x нельзя
попасть на планеты y, z, или Пандору. Тогда кол-во входящих и исходящих связей должно быть равно. 1600 ≠ 1560 => минимум 40 исходящих
связей ведут на планеты вне множества x.
40 − 18 = 22 связи минимум ведут либо на Пандору, ~~либо в множество y~~.
либо в множество y.
(получается, что множества x и y пересекаются),
Кол-во прыжков равно 2 и 3 соответственно.

<u>Ответ</u>: 1,2 или 3 гиперпространственных прыжка.

Черновик 5.

№1.

Б. ... $\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \overset{\wedge}{\circ}\ \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{}$ ... $\geqslant 6$

К. ... $\circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$ ... $\geqslant 7$

Если все р – противоречие.
Если все лжецы

Б. ... $\wedge\ \wedge\ |\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ |$ р р р р р р

К. ... р р | р р р р р р > р $\wedge$ | $\wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge\ \wedge$

Один лжец

№2.

х работников.
Работников стало меньше $\frac{x}{7}$ раз.
Времени стало в 2 раза меньше.

$\frac{\frac{1}{2}t}{v_x}\cdot 7 = \frac{t}{2v_x}\cdot 7 = G$

$\frac{t}{v_x}\cdot x = 10$

81 - 9

80 - ...

$\frac{\frac{7t}{2v_x}}{\frac{xt}{v_x}} = \frac{10}{G}$ $\quad \frac{\frac{7t}{2v_x}}{\frac{t\cdot x}{v_x}} = \frac{G}{10}$ $\quad \frac{7t\cdot v_x}{2v_x\cdot t\cdot x} = \frac{G}{10}$

$\frac{7}{2x} = \frac{G}{10}$

$70 = 2x\cdot G$

Условие: $x > 7$, $G < 10$.

$x = 35$
$G = 1$

(11) грядок.

$\frac{7}{2x} = \frac{10}{G}$

$10\cdot 2x = 7\cdot G$

$20\cdot x = 7\cdot G$

4 5 2.7 (425) 40 грядок.

70 | 7
10 | 5
2 | 2
1 |

70 = G · x: 1·70, 7·10, 5·14, 2·35

№3.

$(\overline{abc} - \overline{acb}) \vdots 72.$

$\vdots 72 \Rightarrow \vdots 3,\ \vdots 4,\ \vdots 6$

$\vdots 9,\ \vdots 8 \quad 2\ 3$

$\overline{bc} - \overline{cb} \vdots 9$

$\overline{1bc} - \overline{cb} \vdots 9$

$\overline{abc} - \overline{acb} \vdots 72 \Rightarrow 72\cdot x - 72\cdot y = 72(x-y)$

$\overline{abc} - \overline{acb} = 0\ldots$

936 : 72 = 13

72, 144, 216, 288, 360, 432, 504, 576, 648, 720, 792, 864, 936

216, 88, 60, 504, 648, 20, 64, 36

6... - 6...

72 -

-72

$-\frac{39}{93}$ $\quad -\frac{92}{29}$ $\quad -\frac{81}{18}$ $\quad -\frac{70}{07}$

Значит есть переход

80 08 — 91 19

Черновик №6 №4

$(x+y)\cdot(x+y+1)+2y=100$

$(x+y)\cdot(x+y+1)=100-2y$

~~два послед. числа => произв. :2~~

$x+y$ - чёт $\qquad$ $x+y+1$ - чёт

$\cancel{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)(x+y+1)=\cancel{2}(50-y)$

$\frac{x+y}{2}\cdot(x+y+1)=50-y$

$\frac{(x+y)\cdot(x+y+1)}{2}=50-y$

$\frac{x^2+xy+x+xy+y^2+y}{2}=50-y$

$\frac{(x+y)^2+x+y}{2}=50-y$

$(x+y)^2$ ~~$(x+y)(x+y)+(x+y)$~~

$(x+y)^2+x+y=100-2y$

$x>y \qquad x=y \qquad x<y$

$(x+y)^2<100$

$x+y=91, 64, 56, 36...$

$(x+y)^2+x+3y=100$ $\quad +2y$

$(x+y)^2=81, 64, 49, 36, 25, 16, 9, 4, 1$

$9^2 \quad 8^2 \quad 7^2 \quad 6^2 \quad 5^2 \quad 4^2 \quad 3^2 \quad 2^2 \quad 1^2$

$9^2+9+2y=100$

$2y=10$

$y=5$

$x=4$

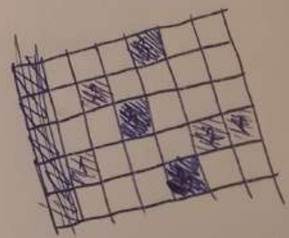
$8^2+8+2y=100$

$2y=28$

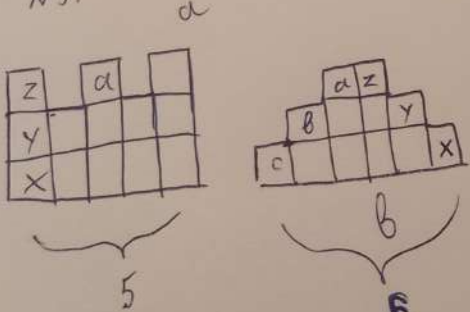
$y=14$

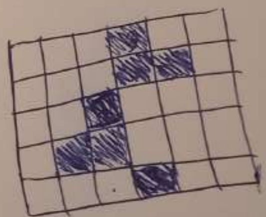
$x<0$ - п-че.

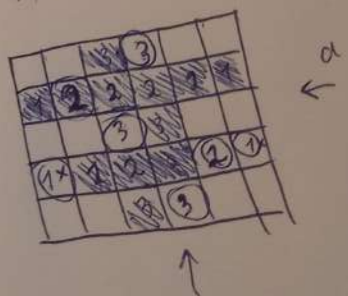
7 - ответ.



N5.







64+8 =

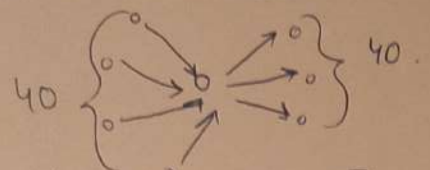
$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 8 \\ \hline 72 \end{array}$

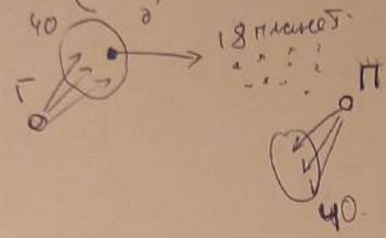
Черновик 7.

№6

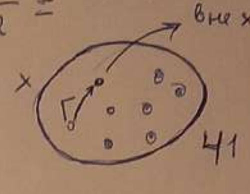
100 планет.

Вне 19 планет.

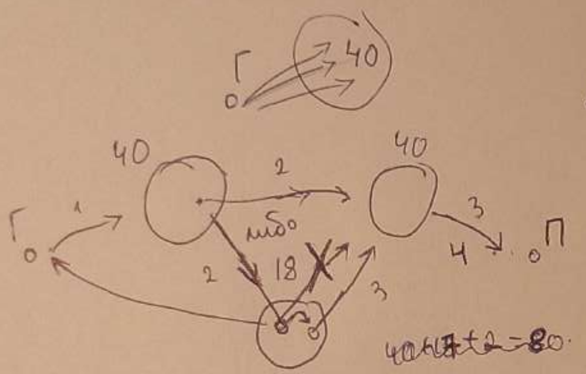




$\frac{41\cdot 40}{2} = 41\cdot 20 = 820$ связей.



Хотя бы 1 планета, с которой можно →



40+40+2 = 80.

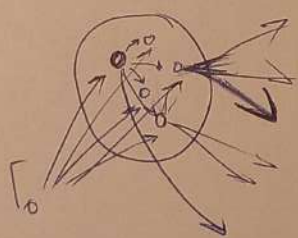
Хотя бы с одной планеты x можно →

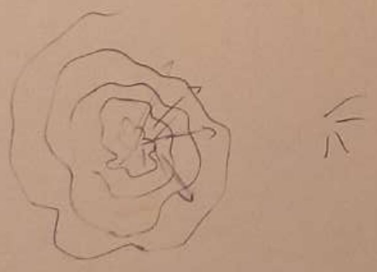
Хотя бы в одну планету y можно →.

$\frac{5\cdot 4}{2} = 10$

$5\cdot 5 = 25$

$1+2+3+4+5 = 17$





→ 40·40 − 1600

40·40 − 1600