



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Глазунов Глеб Александрович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Глазунов Глеб Александрович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	0 баллов	5 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

~~№1 Если бы мы ничего не убрали, тогда на 2022-ом месте~~

Вариант II-1

Чистовик №1

№1 Если бы мы ничего не убрали, тогда бы на 2022 месте стало бы число $2022+5$. Теперь найдем сколько чисел мы убрали:

Сначала квадраты: $2^2 < 6$ - не входит в последовательность: $6 < 3^2, 4^2, \dots, 45^2$

$$46^2 = 2116$$

$$46^2 > 2027$$

$\Rightarrow$ от 6 до 2027: $45 - 3 + 1 = 43$ чисел (квадрата)

Теперь кубы: $6 < 2^3, 3^3, \dots, 12^3$

~~Итого~~

$\Rightarrow$ от 6 до 2027: $12 - 2 + 1 = 11$ чисел (кубов)

Но числа шестой степени мы посчитали дважды: это 2^6 и 3^6

$\Rightarrow$ два числа посчитали дважды

$\Rightarrow$ Всего убрано: $43 + 11 - 2 = 52$ чисел

Теперь на 2022 месте не 2027, а $2027 + 52 = 2079$, заметим что промежутке от 2027 до 2079 нет ни одного квадрата и куба

Мы все учли

Ответ: 2079

$\sqrt{3}$ Углов $\sqrt{2}$

$$1) \angle BAC = \rho$$

$$\angle BCA = \rho$$

т.к. $\triangle ABC$ - равнобедренный

$$\angle BDA = \rho \quad \text{т.к. опирается на } AB$$

$$\angle BDC = \rho \quad \text{опирается на } BC$$

 ~~$\triangle BDC$~~ $\angle CBD = \rho$ т.к. $\triangle BDC$ - равнобедренный ~~$\triangle BDC$ - равнобедренный~~

$$\angle CBD = \angle BDA \Rightarrow BC \parallel AD$$

$$\Rightarrow ABCD - \text{равнобедренная трапеция} \Rightarrow AC = BD = d$$

По теореме Птолемея:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \Rightarrow a^2 + ab = d^2$$

Пусть угол $\angle CDA = \alpha$ тогда $\alpha = \angle DAB$ т.к. трапеция равнобедренная

По теореме косинусов:

$$\triangle CAD: d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\triangle BCD: d^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos(180 - \alpha)$$

Вычитая из ~~первого~~ второго уравнения.

$$2ab \cos \alpha + 2a^2 \cos \alpha = b^2 - a^2$$

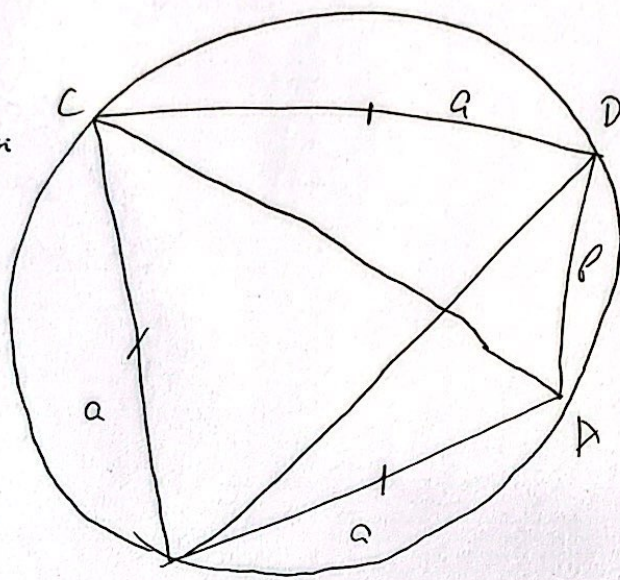
$$2a \cos \alpha \cdot (b + a) = (b - a) \cdot (b + a)$$

$$2a \cos \alpha = b - a$$

$$b = a + 2a \cos \alpha$$

$$d^2 = a^2 + a \cdot b = a^2 + a \cdot (a + 2a \cos \alpha) = \underline{2a^2 + 2a^2 \cos \alpha}$$

$$P = 3a + b = 4a + 2a \cos \alpha$$



Заметим, что $\cos \alpha \neq 0$ т.к. если $\alpha = 90^\circ$, то $d = a\sqrt{2}$, но $\sqrt{2}$ иррационально

$$a, d \in \mathbb{N}; a\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$$

~~$$P = 4a + 2a \cos \alpha$$~~

т.к. $b = a + 2a \cos \alpha \Rightarrow 2a \cos \alpha \in \mathbb{N}$

$$P = 4a + 2a \cos \alpha$$

$$P \geq 3$$

3 достигается при $a=1$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$b=0$$

Если $\cos \alpha > 0$, то $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то $d^2 = 3 \Rightarrow d = \sqrt{3}$

$$a > 1, a=2$$

$$P = 8 + 4 \cos \alpha$$

$$d^2 = 8 + 8 \cos \alpha = \begin{bmatrix} 8-4n \\ 8-2n \end{bmatrix} \Rightarrow n=1 \text{ или } 2 \text{ откуда следует, что}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow b=0$$

$$a > 2, a=3:$$

~~$$P = 12 + 6 \cos \alpha$$~~

$$2 \cdot 3 \cos \alpha = 6 \cos \alpha \in \mathbb{N} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$$

~~$\cos \alpha$~~ $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ и меньше не подходит, т.к. $b = a(1 + 2 \cos \alpha) > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \cos \alpha > -\frac{1}{2}$

Далее перебор ~~$\cos \alpha$~~ : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$

Из этого не подходит

$$a=4:$$

$$P = 16 + 8 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{8}$$

$$P = 17 - \text{наименьшая, т.к. } a=1, 2, 3 \text{ не подходят}$$

$$d^2 = 32 \cdot \frac{1}{8} + 32 = 36 \Rightarrow d = 6; a = 4, \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$y_{\text{участков}}: \sqrt{4}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$2R = \frac{AC}{\sin \alpha} \quad \text{по теореме синусов}$$

$$R = \frac{24}{\sqrt{63}}$$

$$\sqrt{2}$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

~~2x^3~~

$$((2x)^3 + (2x)^2 - 9 \cdot 2x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$$

$$(4x^2 - 9) \cdot (2x + 1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\cos 80^\circ \cdot \sin 40^\circ - \sin 60^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}\right)$$

$$(4x^2 - 9)(2x + 1) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ}\right) \quad \begin{array}{l} \sin 100^\circ = \sin 80^\circ \\ \text{т.к. } \sin \alpha = \sin 180^\circ - \alpha \\ \arccos(1) = 0 \end{array}$$

$$(4x^2 - 9)(2x + 1) \arccos(x-1) \leq 0$$

$$\begin{array}{l} 4x^2 - 9 \leq 0 \\ 2x + 1 \leq 0 \\ \arccos(x-1) \leq 0 \end{array}$$

$$\arccos(x-1) \geq 0 \quad \text{и} \quad \text{поэтому} \quad 0 \leq x \leq 2$$

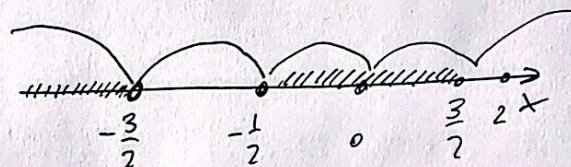
$$(4x^2 - 9)(2x + 1) \leq 0$$

$$\text{Учтем, что } \arccos(x-1) \geq 0$$

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\text{Тогда } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$

$$\text{Ответ: } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$



№ 4

Числовая п.с

Найти формулу n -члена геометрической

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_2 = \left(\frac{4043}{2022} - 1 \right)^3 + 1 = \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^3 + 1$$

Заметим, что

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3(n-1)} + 1$$

Докажем по индукции

База $n=2$ верна.

$$\text{Предположим } a_k = \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3(k-1)} + 1$$

$$\text{Переход, надо доказать, что } a_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3k} + 1$$

~~доказываем~~

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= (a_k - 1)^3 + 1 = \left(\left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3(k-1)} + 1 - 1 \right)^3 + 1 = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3k} + 1 \end{aligned}$$

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2022} \right)^{3n} + 1$$

$$a_{n+1} > 0 \quad \forall n$$

Надо показать существует n , при котором

$$a_{n+1} \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3n} + 1 \leq 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\frac{2021^{3n}}{2022^{3n}} \leq \frac{1}{2021} \Leftrightarrow 2021 \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3n} \leq 1$$

~~Как известно~~

Известно $k \cdot a^x \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$, если $a \in (0, 1)$

~~Значит, ...~~

Ответ: g и h не равны

~~Значит, ...~~

~~$f(x) = 4x^2 + 8x$~~

~~$g(x) = 1x^3 + 2x^2 + x + a + 1x^3 - 2x^2 + x - a$~~

~~$f(x) > g(x)$~~

~~Рассмотрим $x=3$:~~

~~$h(3) = f(3) - g(3)$~~

~~$h(3) = 60 - (16-a) - (48+a)$~~

$\sqrt{6}$ $f(x) = 4x^2 + 8x$

$g(x) = 1x^3 + 2x^2 + x + a + 1x^3 - 2x^2 + x - a$

$f(x) > g(x)$

Рассмотрим $x=3$:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$h(3) = 60 - (16-a) - (48+a)$

Если $a > 12$, то $h(x) < 0$ всегда

Условие $\sqrt{a} \geq 7$

$a < 48$, то $h(x) < 0$ всегда

$h(3) = 0$ всегда $\Rightarrow$ надо найти a при которых $h(2) = 0$,

тогда от 2 до 3 $h(x) > 0$ ~~и~~ $h(x) < 0$ при $x > 3$

$$4 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^0 = |8 + a| + |2 - a|$$

$$a = -24 \text{ или } a = 8$$

Ответ: $a = -24$ или $a = 8$

~~$$1 \cdot x^3 + 2x^2 + x + a + 1x^2 - 2x^2 - 2x - a$$~~

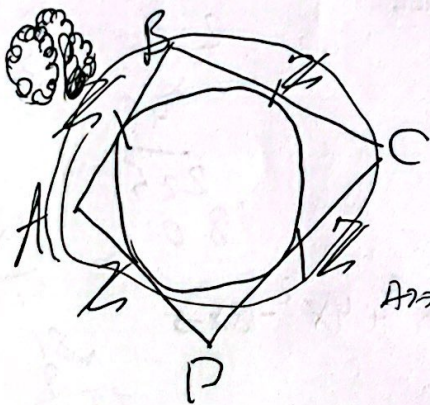
$\sqrt{3}$ 6 7 8 9 10

Чепорук $\sqrt{1}$

$\sqrt{2}$ $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

$(x(8x^2 + 4x - 18) - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

$(2x(4x^2 + 2x - 9) - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{\sin 30^\circ}{2\cos 40^\circ} + \frac{\cos 30^\circ}{\cos 50^\circ}\right)$
 $|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$



$a_1 = \frac{4043}{2027}$

$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$

$|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$

$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$
 $a_{n+1} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3)$

$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x(x+2)$
 $a_{n+1} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3)$

8 $(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$

Умножить $\sqrt{7}$

$$|x^3 + 2x^2 + x + 9| + |x^3 - 2x^2 + x - 9| < 4x^2 + 8x$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}\right)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{\cos 50^\circ}\right)$$

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq$$

$$\arccos(x-1) \leq \arccos$$

$$n=2$$

$$a_n = \frac{1}{20^{n+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{20^{22}}\right)^{3K-3} + 1$$