



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Акопова Елена Николаевна**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Аكوпова Елена Николаевна

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	10 баллов	0 баллов	10 баллов	80 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

№1.

1) Найдем число, стоящее на 2022 месте в данной последовательности без удаленных элементов: $6 + 2022 - 1 = 2027$

2) Найдем ближайший слева к 2027 куб и квадрат.

$$\left. \begin{array}{l} 45 \cdot 45 = 2025 \\ 46 \cdot 46 = 2116 \end{array} \right\} 2025 < 2027 < 2116 \Rightarrow 45^2 < 2027 < 46^2$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728 \\ 13 \cdot 13 \cdot 13 = 2197 \end{array} \right\} 1729 < 2027 < 2197 \Rightarrow 12^3 < 2027 < 13^3$$

Найдем ближайший справа к 6 куб и квадрат:

$$2^2 < 6 < 3^2$$

$$1^3 < 6 < 2^3$$

3) Также образом, между 6 и 2027 расположены квадраты всех чисел от 3 до 45 включительно и кубы всех чисел от 2 до 12 включительно. Следовательно, мы вычеркнем $45 - 3 + 1 + 12 - 2 + 1 = 54$ чисел, тогда 2022 по счету число переместится на 54 позиции правее, чем 2027. Получим $2027 + 54 = 2081$.

4) Рассмотрим числа, которые являются одновременно и кубом и квадратом. Для этого переберем кубы чисел от 2 до 12:

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2^3 = 8^2 = 64$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 2^9$$

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 \cdot 3^3 = 27^2 = 729$$

$$10 \cdot 10 \cdot 10 = 2^3 \cdot 5^3$$

$$11 \cdot 11 \cdot 11$$

$$12 \cdot 12 \cdot 12 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^3$$

Итак, два числа (64, 729) были посчитаны в пункте 3) два раза. Тогда избавившись от этого пересечения, вычеркнув их по одному разу. Получим, что 2022 по счету число сместится на 2 влево. $2081 - 2 = 2079$

Ответ: 2079

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right), \text{ DOK: } -1 \leq x-1 \leq 1$$

$$1) \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\cos(\frac{\pi}{2} - 50^\circ)} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ}{4\sin 50^\circ \cos 50^\circ} =$$

$$= \frac{2(\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ)}{2\sin 100^\circ} = \frac{2(\sin(30^\circ + 50^\circ))}{2\sin 100^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 100^\circ} = 1.$$

$$2) 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

возможные корни: $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{3}{8}; \pm \frac{9}{2}; \pm \frac{9}{4} \dots$

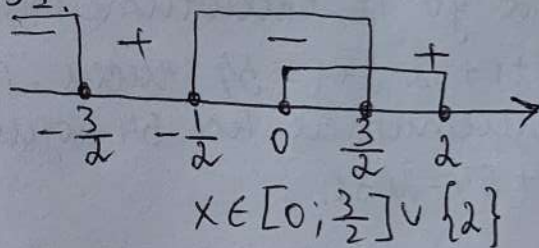
	8	4	-18	-9
$-\frac{1}{2}$	8	0	-18	0
$\frac{3}{2}$	8	12	0	

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 8(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0,$$

$$3) (x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos 1.$$

$$(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2}) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

$$\text{Ответ: } x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$$



N4.

$$a_1 = \frac{4043}{2022}$$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$|a_n| \leq \frac{2022}{2021} - ?$$

1) Пусть n такое наймось, $|a_n| = |a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1}| \leq \frac{2022}{2021}$

2) Докажем, что $a_n > 1$: пусть $a_n < 1$: $a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1} - 1 < 0$
 $(a_{n-1} - 1)^3 < 0$
 $a_{n-1} < 1$

тогда и $a_{n-1} < 1$. Спускаясь рекурсивно, доходим до $a_1 < 1$, но $a_1 = \frac{4043}{2022} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие. Тогда $a_n > 1$.

Доказано.

3) Значит,

$$1 < a_{n-1}^3 - 3a_{n-1}^2 + 3a_{n-1} \leq \frac{2022}{2021}$$

$$0 < (a_{n-1} - 1)^3 \leq \frac{1}{2021}$$

$$1 < a_{n-1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

4) Сравним

$$\frac{4043}{2022} \vee 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$\frac{2021}{2022} \vee \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$\frac{2021^4}{2022^3} \vee 1.$$

$$\frac{2021^4}{2022^3} > 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2021^4}{2022^3} > 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}},$$

тогда

$$1 < a_{n-1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}} < \frac{4043}{2022}$$

$$1 < a_{n-2}^3 - 3a_{n-2}^2 + 3a_{n-2} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$0 < (a_{n-2} - 1)^3 \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$1 < a_{n-2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2021}} + 1$$

с каждым возвращением к предыдущему члену диапазон его возможных значений расширяется (правая граница совпадает)

Т.к. утраивается степень, увеличивая из числа, меньшего 1, само число увеличивается. След, когда-то (на n итерации) получим $a_1 = \frac{4043}{2022} = 2 - \frac{1}{2022} < 1 + \frac{1}{2\sqrt{2021}}$, такое возможно.

След, из $a_n \leq \frac{2022}{2021}$ можно спуститься к $a_1 = \frac{4043}{2022}$, значит, ~~всегда~~ справедлив и обратный рассуждение о том, что из a , можно получить $a_n \in (1; \frac{2022}{2021}]$

Ответ: да

N6

$$|x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| < 4x^2 + 8x$$

$$\begin{cases} |x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| = |2x^3 + 2x| \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0 \end{cases} / \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \leq 0 \end{cases} \\ |x^3 + 2x^2 + x + a| + |x^3 - 2x^2 + x - a| = |4x^2 + 2a| \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \leq 0 \end{cases} / \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - a \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$(1) |2x^3 + 2x| = 4x^2 + 8x$$

$$|x^3 + x| = 2x^2 + 4x$$

$x=0$ - проверим подстановкой в изр-во. не подходит: $|a| + |-a| \neq 0$
 $x=3$

$$(2) |4x^2 + 2a| = 4x^2 + 8x$$

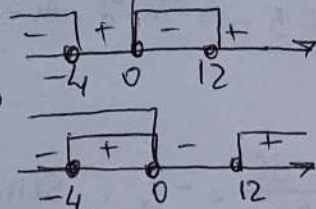
$$\begin{cases} a \geq -2x^2 \\ a = 4x \\ a \leq -2x^2 \\ a = -4x^2 - 4x \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{4} \\ a \geq -2x^2 \\ 4x^2 + 4x + a = 0 \\ a \leq -2x^2 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{4} \\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4a}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2} \end{cases}$$

(Ищем точки, когда неравенство обращается в равенство)
 Подставим в условие раскрытия модуля:

$$x=3, \begin{cases} 27+18+3+a \geq 0 \\ 27-18+3-a \geq 0 \\ 27+18+3+a \leq 0 \\ 27-18+3-a \leq 0 \end{cases} \begin{cases} 48 \leq a \leq 12 \\ a = \emptyset \end{cases} \Rightarrow a \in [-48; 12]$$

$$x = \frac{a}{4} \begin{cases} \frac{a^3}{64} + \frac{2a^2}{16} + \frac{a}{4} + a \geq 0 \\ \frac{a^3}{64} - \frac{2a^2}{16} + \frac{a}{4} - a \leq 0 \\ \frac{a^3}{64} + \frac{a^2}{8} + \frac{a}{4} + a \leq 0 \\ \frac{a^3}{64} - \frac{a^2}{8} + \frac{a}{4} - a \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a^3 + 8a^2 + 16a + 64a \geq 0 \\ a^3 - 8a^2 + 16a - 64a \leq 0 \\ a^3 + 8a^2 + 16a + 64a \leq 0 \\ a^3 - 8a^2 + 16a - 64a \geq 0 \end{cases} \begin{cases} a(a^2 + 8a + 80) \geq 0 \\ a(a^2 + 8a - 48) \leq 0 \\ a(a^2 + 8a + 80) \leq 0 \\ a(a^2 - 8a - 48) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a(a-12)(a+4) \leq 0 \end{cases} \begin{cases} a \leq 0 \\ a(a-12)(a+4) \geq 0 \end{cases}$$



$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2}$$

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + a \leq 0 \\ x^3 - 2x^2 + x + a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+2\sqrt{1-a}+1-a}{2} + \frac{-1-\sqrt{1-a}}{2} + a - \frac{1+\sqrt{1-a}}{2} \left(\frac{2-a+2\sqrt{1-a}}{4} \right) \\ & = \frac{1+\sqrt{1-a}+a}{2} - \frac{2\sqrt{1-a}-a\sqrt{1-a}+2-2a+2-a+2\sqrt{1-a}}{8} \\ & \leq 0, \quad 4+4\sqrt{1-a}+4-2\sqrt{1-a}+a\sqrt{1-a}-4+3a-2\sqrt{1-a} = \\ & = 7a+a\sqrt{1-a} \leq 0 \\ & a(7+\sqrt{1-a}) \leq 0, \quad a \in (-\infty; 0] \end{aligned}$$

Тогда возможны варианты:

$$x \in (3; \frac{a}{4})$$

$$x \in (\frac{a}{4}; 3)$$

$$x \in (\frac{a}{4}; \frac{-\sqrt{1-a}-1}{2})$$

$$x \in (\frac{-\sqrt{1-a}-1}{2}; \frac{a}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} - 3 = 1, a = 16$$

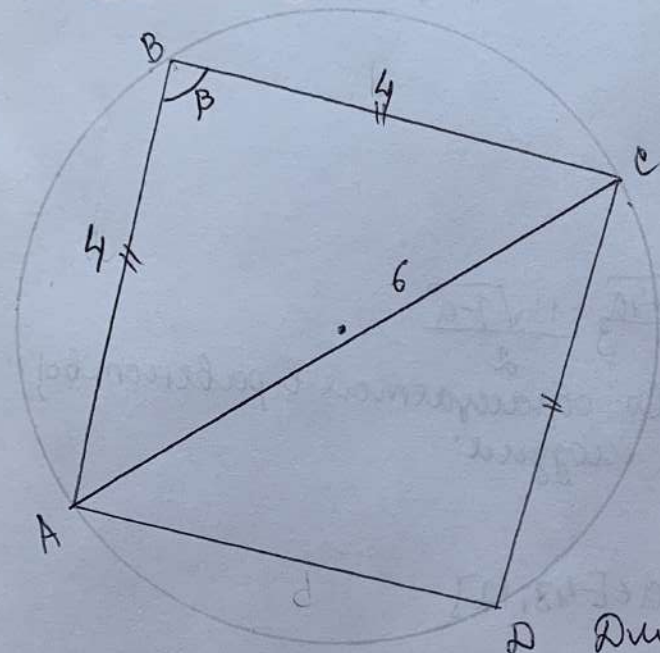
$$\Rightarrow 3 - \frac{a}{4} = 1, a = 8$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{1-a}-1}{2} = \frac{a}{4} = 1, a = \emptyset \text{ (нет решений)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{4} + \frac{\sqrt{1-a}+1}{2} = 1, a = \emptyset, \text{ нет решений.}$$

Ответ: $a = 8$

(сопряженное выражение не стану рассматривать отдельно, сразу приведем к нулю)



N3

Дано: $AB = BC = CD$.

$AB, AC, BC, CD \in \mathbb{Z}$

Найти: p, R .

Решение:

$$1) PE \sqrt{\frac{(BC \cdot CD + AB \cdot AD)(AC \cdot AD + AB \cdot BC)}{AB \cdot BC + CD \cdot AD}} \Rightarrow$$

$$AB = BC = CD$$

Для впис. чет. и по диагоналям

$AC, AB, AD \in \mathbb{Z}, AC \in (AB, 2AB)$ - по неравенству треугольника.

2) Чтобы P был наименьшим, стороны должны быть минимально возможными. Начнем перебирать значения AB :

$$AB = 1: AC^2 = 1 + AD, 1 < AC < 2 \text{ (по н. труг.)}$$

$$AB = 2: AC^2 = 4 + 2AD, 2 < AC < 4, AC = 3: 5 = 2AD, AD \notin \mathbb{Z}$$

$$AB = 3: AC^2 = 9 + 3AD, 3 < AC < 6, AC = 4: 7 = 3AD, AD \notin \mathbb{Z}, AC = 5: 16 = 3AD, AD \notin \mathbb{Z}$$

$$AB = 4: AC^2 = 16 + 4AD = 36, AD = 5, 4 < AC < 8, AC = 6, 20 = 4AD, AD = 5.$$

$$\text{Тогда } p = 3AB + AD = 12 + 5 = 17$$

$$3) \text{ Теперь из } \triangle ABC: \cos \angle B = \frac{32 - 36}{32} = -\frac{1}{8}; \sin \angle B = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8} - \text{ по Т. кос.}$$

$$\text{А по Т. синусов: } \frac{AC}{\sin \angle B} = 2R, R = \frac{6}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ}{4\sin 50^\circ \cos 50^\circ} = \frac{2(\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ)}{2\sin 100^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin(50^\circ + 30^\circ))}{2\sin 100^\circ} = 1.$$

$$2 - \frac{1}{2022} = a_n(a_n^2 - 3a_n + 3) \leq \frac{2022}{2021} \left(\frac{2022^2}{2021} \right)$$

$$a^2 - 3a + 2 \neq 0$$

21. $\sqrt[3]{\frac{1}{\dots}}$ $(a-1)(a-2) < 0$ 

$$1 < a_n < 2 \Rightarrow 1 < a_{n+1} < 2$$

$$0 < a_n - 3a_{n+3} + 3 < 1.$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 \leq 0$$

$$(a-1)^{\frac{3}{2}} < 0, \quad a < 1.$$

$$\text{d) } a_n < 1, \quad a_{n+1} < a_n > 1, \quad a_{n+1} > a_n$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a \leq \frac{2022}{2021}$$

$$(n-1)^3 \leq \frac{1}{2021}$$

$$\alpha \leq 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2021}}$$

$$1 < a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3a_{n-1} \leq 1 + \frac{1}{3^{2021}}$$

$$\frac{\sqrt{102}x}{1} + 1 \leq 40 \Rightarrow 1$$

[illegible]

18490945322991

Handwritten calculations for the sum of 1444 and 1444:

$$\begin{array}{r} 1444 \\ + 1444 \\ \hline 2888 \end{array}$$

The student has written the sum 2888 and circled it.

$$\frac{\text{more}}{\text{more}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\text{more}}{1} \geq 1 \geq 0 \geq 1$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2021}}{1}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2021}}{1}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2021}}$$

$$14000 \times 1000 = 14000000$$

$$b = a^3 - 3a^2 + 3a$$

$$\frac{2202}{4043} \approx \frac{1000}{1000} \sqrt{\frac{1}{3}} + 1 \approx 0.77$$

$$a \leq 1 + \sqrt[3]{\frac{1}{2000}}$$

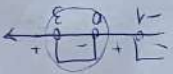
749 ' 1071

103 Y

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$b = a^3 - 3a^2 + 3a$$

2/2/20

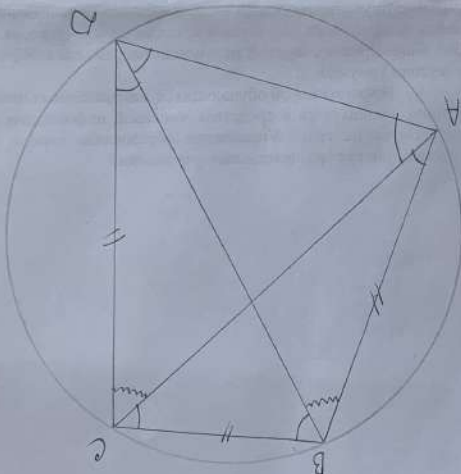


$$\begin{aligned} & 4x^2 + 4x + a > 0 \\ & 0 < 4x^2 + 8x + 2a < 0 \quad (2) \\ & x(x-3)(x+1) < 0 \\ & x^3 - 3x^2 - 3x < 0 \\ & 0 < x^3 - 4x^2 - 6x < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$-4x^2 - 2a < 4x^2 + 8x$$

$$12 - 2x + 4x - 3 + x = 54 + 2027$$

$$2027 + 54 = 2081$$



$$\begin{aligned} & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \\ & 2029 \cdot 1 \cdot x \cdot 64 \text{ gba paza} \end{aligned}$$

Beilap

$$\begin{aligned} & (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \arccos(x-1) \leq 0 \\ & (2x-3)(2x+3)(2x+1) \arccos(x-1) \leq 0 \end{aligned}$$



$$1 < a^3 - 3a^2 + 3a \leq \frac{2022}{2021}$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a \leq 1$$

$$a_1 \leq 1 - \text{неверно. } a \leq 1$$

$$x(x+2) > 0$$

$$\frac{a}{4} - 3 = 1$$

$$3 - \frac{a}{4} = 1$$

$$0 < (a-1)^3 \leq \frac{1}{2021}$$

$$1 < a \leq \sqrt[3]{\frac{1}{2021}} + 1 \leq \frac{40}{20}$$

$$1 \leq a^3 - 3a^2 + 3a \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2021}}$$

$$\frac{1}{27 \sqrt[3]{2021}}$$

$$x(x+1)^2$$