



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Мирзоева Елена Игоревна**

Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Мирзоева Елена Игоревна

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	15 баллов	0 баллов	20 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Источники:

(1)

I

1

1, 2, 3, 4, ..., 2027, ...

Заметим, что 2027 - 2022 = 5.

$45^2 = 2025 \Rightarrow 45^2$ - последний квадрат идущий до 2022-го числа, т.к. $46^2 = 2116$, и $2116 > 2022$.

$13^3 = 2197$, т.е. $13^3 > 2027$, т.е. больше 2022-го числа, тогда 12^3 - последний куб до 2022-го числа.

Также стоит учесть повторения: $4^3 = 8^2 = 2^6$ и $9^3 = 27^2 = 3^6$, т.е. из конечного кол-ва ~~выбранных~~ чисел ~~удерживаем~~ 2 повторения.

Теперь посчитаем кол-во квадратов, кубов:

$6 < 3^2, \dots, 44^2, \underset{2025}{45^2}$, тогда $45 - 3 + 1 = 43$ чисел (квадратов).

$6 < 2^3, 3^3, \dots, \underset{1728}{12^3}$, тогда $12 - 2 + 1 = 11$ чисел (кубов)

Не забудем про повторения:

$43 + 11 - 2 = 52$ числа вычтем, теперь не 2022-го числа не 2027, а $2027 + 52 = 2079$, также стоит заметить, что между 2027 и 2079 - нет квадратов и кубов.

Ответ: 2079.

Задача: (2)

2

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 8\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 8(x - 1.5)(x + 1.5)(x + 0.5)$$

$$\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2} \sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 40^\circ}{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = 1$$

Рассмотрим приведённое выражение:

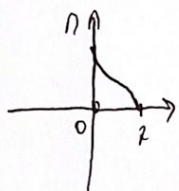
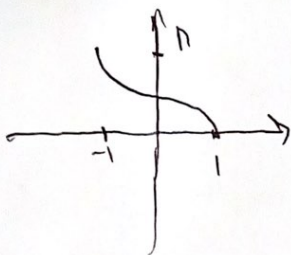
$$8(x - 1.5)(x + 1.5)(x + 0.5) \cdot \arccos(x - 1) \leq \arccos 1, \text{ но } \arccos 1 = 0, \text{ тогда:}$$

$$8(x - 1.5)(x + 1.5)(x + 0.5) \cdot \arccos(x - 1) \leq 0$$

Оценим функцию $\arccos(x - 1)$:

$$\arccos x$$

$\arccos(x - 1) - \arccos x$, то функция не убывает:



Тогда $\arccos(x - 1)$ определён при $x \in [0, 2]$, то $\arccos \geq 0$, при $x \in [0, 2]$, $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ первое произведение:

$$8(x - 1.5)(x + 1.5)(x + 0.5) \leq 0, \text{ при } x \in [0, 2]$$

$$(x - 1.5)(x + 1.5)(x + 0.5) \leq 0$$



$x \in [-1.5, -0.5] \cup [0.5, 1.5]$, также заметим, что при $x = 2$ $\arccos(x - 1) = 0$, т.е. $x = 2$, тоже ответ.

Ответ: $[-1.5, -0.5] \cup [0.5, 1.5] \cup \{2\}$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$$

$$a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n + 1 - 1 = (a_n - 1)^3 + 1$$

$$a_1 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 1$$

$$a_2 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^3 + 1$$

$$a_3 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^9 + 1$$

$$a_4 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{27} + 1$$

$$a_5 = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{81} + 1$$

Заметим, что:

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{n-1}} + 1$$

Теперь сравним a_n с $\frac{2022}{2021}$:

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{2022}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$$

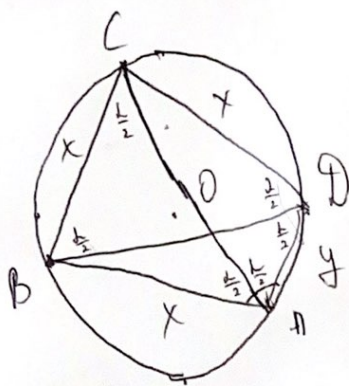
Пусть $f(n) = \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$, тогда $f'(n) = 3(n-1) \cdot \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}-1}$, заметим, что при $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 0$:

$$3n-1 \geq 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}-1} > 0$$

Заметим, что $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$ - показательная функция и $0 < \frac{2021}{2022} < 1$.

Также 3^{n-1} - показатель степени и $3^{n-1} > 0$, при любых n , т.е. $0 < \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} < 1$, и при увеличении n они стремятся к 0 $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ найдётся такое n , при котором $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}$.

З.т.д.



Пусть $AB=BC=CD=x$, а $AD=y$, так как $\angle BAD=\alpha$, тогда $\angle CPA=180^\circ-\alpha$.

$$AC^2 = x^2 + x^2 + 2x^2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$AC = \sqrt{2x^2 + 2x^2 \cos \alpha} = x \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$$

По теореме Птолемея:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$AC^2 = x^2 + xy$$

$$2x^2 + 2x^2 \cos \alpha = x^2 + xy$$

$$x + 2x \cos \alpha = y$$

$$x + 2x \cos \alpha = y$$

$$x(1 + 2 \cos \alpha) = y$$

Теперь определим значения x , найдем $\cos \alpha$ и подставим в $x \sqrt{2 + 2 \cos \alpha}$, которое тоже учтем.

$$x \geq 1$$

$$y = 1 + 2 \cos \alpha, \text{ при } (1 + 2 \cos \alpha) \in [-1; 3], \text{ т.е.}$$

$$\begin{cases} 1 + 2 \cos \alpha = 1 \\ 1 + 2 \cos \alpha = 2 \\ 1 + 2 \cos \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cos \alpha = 0 \\ 2 \cos \alpha = 1 \\ 2 \cos \alpha = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0, \\ \cos \alpha = \frac{1}{2}, \\ \cos \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$AC = 1 \cdot \sqrt{2} - \text{не подходит}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$AC = 1 \cdot \sqrt{3} - \text{не подходит}$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$AC = 1 \cdot 2 = 2, \text{ но при } \cos \alpha = 1, \alpha = 0 - \text{не возможно.}$$

Lucrobuk

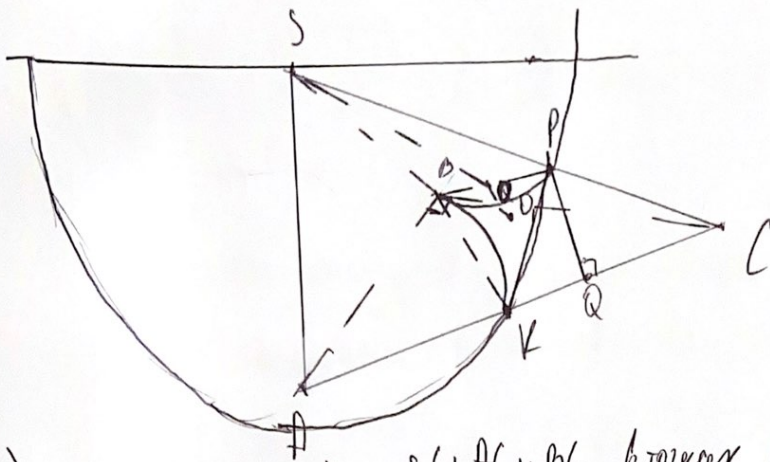
$$S_{BCD} = \frac{x^2 \cdot \sin \angle}{2}, \text{ lge } \sin \angle = \frac{1}{64} = \frac{\sqrt{3}}{8}, \text{ i.e. } S_{BCD} = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

$$S_{BCD} = \frac{abc}{4R}, \text{ i.e. } 6\sqrt{3} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 5}{4R}; \quad R = \frac{5}{2}$$

$$S_{BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5^2 \cdot 3^2 \cdot 7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$S_{BCD} = \frac{abc}{4R}; \quad \frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4R} = R = \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{15\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Other: $\frac{8}{\sqrt{7}}$



- 1) сфера пересекает ребра SC ; AC и BC в точках P ; K и B .
- 2) $\triangle ABC$ прямоугольный и равнобедренный, тогда гипотенуза $AC = 2\sqrt{2}$ ($AB=BC=2$)
- 3) $\triangle SBC$ - прямоугольный и $SA=AB=2$, тогда $SB=2\sqrt{2}$
- 4) $SB=AC$, но AC - радиус сферы, т.е. $SB=AC=R=2\sqrt{2}$
- 5) $SK=SP=SB=R=2\sqrt{2}$
- 6) в $\triangle BPK$: $PK \perp BK$ по теореме о 3 перпендикулярах, тогда $\triangle BPK$ - прямоугольный и $\angle BPK$ - прямой
- 7) в $\triangle BPK$ опустим высоту SO - она будет также медианой, т.к. $SB=SP=2\sqrt{2}$ ($\triangle SBP$ - равнобедренный), $\Rightarrow O$ - центр BP , но BP - гипотенуза $\triangle BPK$, значит, O - центр опис. окр. треуг. BPK , $\Rightarrow SO$ - высота пирамиды $SBPK$ (боковые ребра равны, значит, высота падает в центр опис. окр.)
- 8) $SC = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (SC - гипотенуза $\triangle SAC$)
- 9) По теореме косинусов: $BK^2 = (2\sqrt{3}-2\sqrt{2})^2 + 4 - \frac{8\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) \Rightarrow BK^2 = 16 - 8\sqrt{6} + \frac{8\sqrt{6}}{3} = 16(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}) \Rightarrow BK = 4\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{3}}$
- 10) $SO = \sqrt{8 - 4(\frac{3-\sqrt{6}}{3})} = 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}$
- 11) $SO_1 = R = 2\sqrt{2} \Rightarrow OO_1 = SO_1 - SO = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}} = 2(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}})$
- 12) $V = \frac{SO_1^2 \cdot \pi}{3} (\pi SO \cdot OO_1) = \frac{4(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}})^2 \pi}{3} = \frac{4\pi}{3} (\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}})^2$

(X) $(4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{3}})$

13) ~~PQ~~

Исходные

9

$$PQ = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} \cdot 2 = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$$

$$14) V_{PBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot 2(\sqrt{2}-1) = \frac{12-6\sqrt{2}-4\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{9}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_A \cdot h_{ABC} = \frac{4}{3}$$

V - объем части фигуры которую мы выедем. Разность
всех пирамид, маленькой + части пирамиды внутри маленькой.

$$V_x = \frac{4}{3} - \frac{12-6\sqrt{2}-4\sqrt{6}+4\sqrt{3}}{9} + \frac{4\pi}{3} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3+16}{3}} \right)^2 \left(4\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{2+16}{3}} \right)$$

Известно, что $|x|+|y| \geq |x+y| \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \geq |x^3+2x^2+x+a + x^3-2x^2+x-a|$$

$$|x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \geq |2x^3+2x|, \text{ то } \cancel{4x^2+8x}$$

$$|x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \geq 4x^2+8x, \text{ т.е. } 4x^2+8x > |2x^3+2x|, \text{ т.к.}$$

строгость нер-ва не вылет на длину промежутка; для ответа на вопрос зададим
решим полученное нер-во:

$$4x^2+8x > |2x^3+2x|$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x(x+1)(x-3) < 0 \\ x < 0 \\ -2x(x^2+2x+5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0; 3] \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

т.е. $x \in [0; 3]$, исходя из этого

решения будут на отрезке $[0; 3]$.

При $x=3$, получим:

$|48+a|+|12-a| \leq 60$, т.е. при $a \in [-48; 12]$, всегда существуют
 $x=2$ и $x=4$, тогда подставим их в исходное нер-во:

$$|18+a|+|2-a| = 32$$

$$a=8; a=-24$$

$$|100+a|+|36-a| = 56$$

нет решений.

Т.к. $x^3+2x^2+x+a \geq 0$ и $x^3-2x^2+x-a \geq 0$, при $x \in [0; 3]$, то нер-во
принимает вид:

$4x^2+2a \leq 4x^2+8x$, то не выполняется при $x \in [0; 3]$ и $a < -48$.

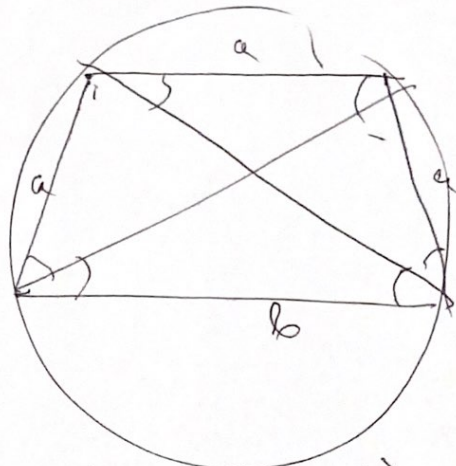
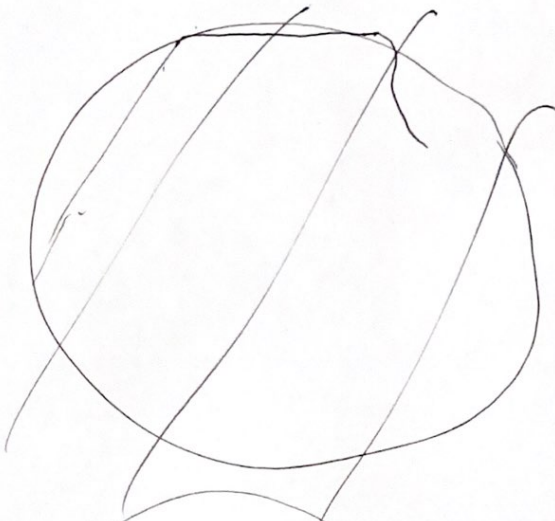
Также $x^3+2x^2+x+a \leq 0$ и $x^3-2x^2+x-a \geq 0$, при $x \in [0; 3] \Rightarrow$

$\Rightarrow -(4x^2+2a) < 4x^2+8x$ не работает $\Rightarrow$ остались только $a=8; a=-24$

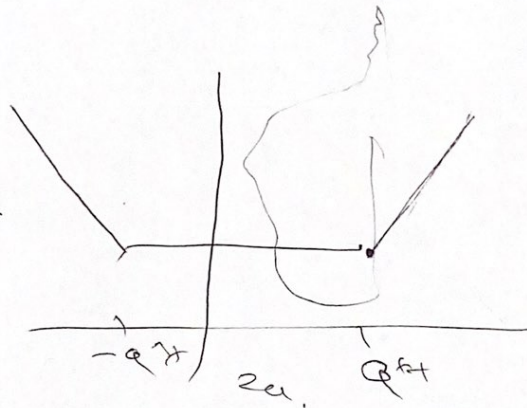
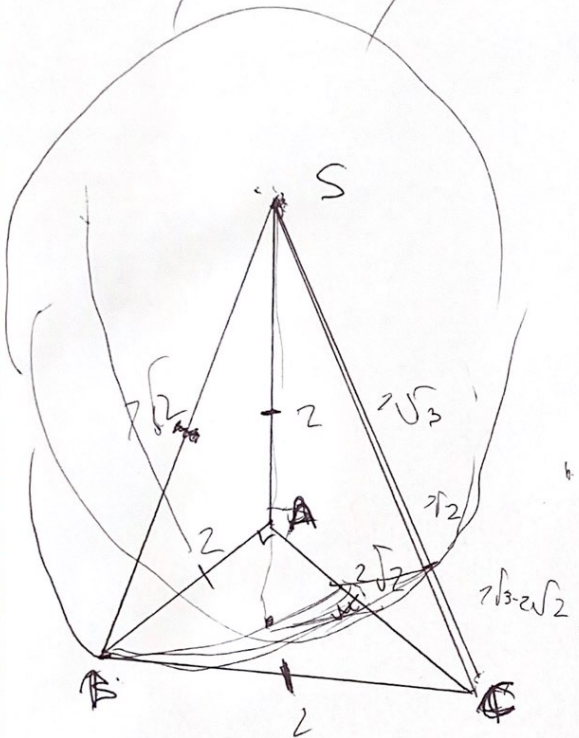
Ответ: $\{8; -24\}$.

Черновик

1



$$\begin{cases} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\alpha \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2\beta \end{cases}$$



$$\begin{aligned} r(r+1) &= \frac{a}{2} \\ + (-1)^r \end{aligned}$$

$$1 + \frac{2021}{2022}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_n^2}{a_n^2 - 3a_n + 3} \right)^{-3/9-1} \\ & 1 + \left(\frac{2021}{2022} \right)^2 = \frac{4042}{2022} \end{aligned}$$

$$\frac{-3 \cdot 2021}{2022}$$