



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шмелев Матвей Александрович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шмелев Матвей Александрович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Числовик.

Если бы ничего не было, то 2022-е число было бы $12+201=2023$, так что 2022-е число при удалении квадратов и кубов не меньше 2023. От 12 до 2023 есть квадраты: $4^2, 5^2, 6^2, \dots, 45^2$, кубы: $3^3, 4^3, \dots, 12^3$, шестые степени, являющиеся и квадратами и кубами: $2^6, 3^6$. Поэтому от 12 до 2023 удалено $42+10-2=50$ чисел, и 2023 на самом деле является $2022-50=1972$ -м. Тогда 2022-е число никак не меньше $2033+50=2083$. От 2034 до 2083 нет ни квадратов, ни кубов: $46^2 < 2034 < 2083 < 46^2$, $12^3 < 2034 < 2083 < 13^3$. Поэтому 2083 — это 2022-е число по последовательности.

Ответ: 2083.

Числовик.

$$(18x^3 - 9x^2 - 2x + 1) \arccos(-2x-1) \geq \arccos\left(\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ}\right)$$

$$18x^3 - 9x^2 - 2x + 1 = 9x^2(2x-1) - (2x-1) = (9x^2-1)(2x-1) = (3x-1)(3x+1)(2x-1)$$

$$\frac{1}{4\sin 50^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\sin 40^\circ} = \frac{1}{4} \frac{\sin 40^\circ + \sqrt{3}\sin 50^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} = \frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} =$$

$$\frac{\cos 60^\circ \sin 40^\circ + \sin 60^\circ \cos 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\sin 80^\circ} = 1, \text{ т.к. } \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) =$$

$$\sin 80^\circ$$

$$\arccos 1 = 0$$

$\arccos(-2x-1)$ определен при $-1 \leq -2x-1 \leq 1$, $0 \leq -2x \leq 2$, $-1 \leq x \leq 0$.
При таких x $3x-1 < 0$, $2x-1 < 0$, поэтому неравенство равносильно $(3x+1) \arccos(-2x-1) \geq 0$.

$\arccos(-2x-1) \in [0; \pi]$ и равно 0 только при $-2x-1=1$, $x=-1$.

То есть при $-1 < x \leq 0$ $\arccos(-2x-1) > 0$ и требуется $3x+1 \geq 0$, т.е. $x \geq -\frac{1}{3}$. А при $x=-1$ $\arccos(-2x-1)=0$ и неравенство

выполнено.

Ответ: $x \in \{-1\} \cup [-\frac{1}{3}; 0]$.

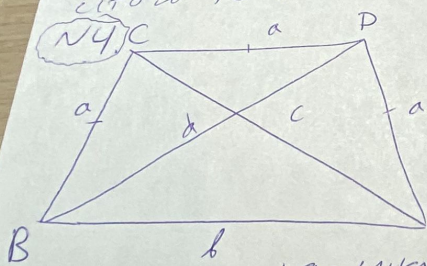
Числовик

23) Числовые.

По неравенству о средних $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} = \frac{2022}{3} = 674$,
 $xyz \leq 674^3$. Также $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$, поэтому
 что $0 \leq \frac{1}{2}((x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2)$, значит $3(xy+yz+zx) \leq x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 = 3^2 \cdot 674^2$, итого
 $xy+yz+zx \leq 3 \cdot 674^2$, $xyz+xy+yz+zx+2023 \leq 674^3 + 3 \cdot 674^2 + 2023$ - целое число, оно делится
 если при $x=y=z=674$. То есть надо найти число делителей
 $674^3 + 3 \cdot 674^2 + 2023 = 674^3 + 3 \cdot 674^2 + 3 \cdot 674 + 1 = (674+1)^3 = (675)^3 =$
 $= (3^3 \cdot 5^2)^3 = 3^9 \cdot 5^6$. Пусть $d(3^9 \cdot 5^6)$ - натуральный делитель.

Тогда у него нет простых делителей отличных от 3 и 5.
 значит $d = 3^a \cdot 5^b$, а $7, 0$, $b \geq 0$ - целые. $a \leq 9$ и $b \leq 6$, чтобы
 $3^9 \cdot 5^6$ делилось на d . Итого a можно выбрать от 0 до 9 -
 10 способами, b от 0 до 6 - 7 способами,
 итого 70 способов выбрать d , т.е. у 675^3 70 делителей.

Ответ: 70.



Пусть $BC=CD=AD=a$, $AB=b$, $AC=c$,
 $ABD=d$. По теореме Птолемея
 $cd = a^2 + ab = a(a+b)$, значит cd
 делится на a . Заметим, что

$c \neq a$ - иначе две окружности с центром
 C и радиусом a и описанная около $ABCD$ пересекаются
 в трех точках A, B, D , что невозможно для несовпадения
 окружностей (они несовпадают, потому что C принадлежит
 только одной из них - той, что описана около $ABCD$).
 Аналогично, $d \neq a$. По неравенству треугольника

$c \leq a+a=2a$, $d \leq a+a=2a$, с учетом $c \neq a$, $d \neq a$,
 получаем, что c и d не делятся на a . Значит, $a \neq 1$ (любое
 целое, в том числе и c , делится на 1, но c не делится на a).
 Также a не может быть простым, т.к. для любого a из

аху. ~ 5 (прод)

$a = -4$. При $a \geq 0$

$$\begin{cases} x \in (5; 0) \\ 4x^2 - 4x - a \geq 0 \end{cases}$$

Чистовик.

$$y \in (4; 4) - a \geq 0$$

один корень положительный, другой отрицательный, ведение равно

24 (прод) Чистовик

$cd \mid a$ следовало бы $c \mid a$ или $d \mid a$. Поэтому a составное, $a \geq 4$, $a \neq 5$. При $a \geq 6$ периметр $3a + b \geq 3 \cdot 6 + 1 = 19$.
При $a = 4$ $cd = a(a+b) = 4(4+b)$, $c \neq 4$, $d \neq 4$, $c \leq 8$, $d \leq 8$.

Чтобы cd делилось на 4 нудно, чтобы c и d делились на 2, иначе одно из них вачлно пром $a = 4$, а другое будет вынуждено делиться на a , что невозможно. То есть $c = 2$ или $c = 6$, $d = 2$ или $d = 6$. $cd \neq 16$, $a^2 = 16$. Пусть $c = 2$,

тогда $cd \leq 2 \cdot 6 = 12 \leq 16$, противоречие. Аналогично, $d \neq 2$.

Откуда $d = 6$, $c = 6$, $6 \cdot 6 = 4(4+b)$, $b = 5$, периметр $3 \cdot 4 + 5 = 17 < 19$, значит, это четырехугольник, удовлетворяющий условию, с наименьшим периметром. Он существует, пример в декартовых координатах: $B = (-2, 5; 0)$, $C = (-2; \sqrt{15 \frac{3}{4}})$,

$D = (2; \sqrt{15 \frac{3}{4}})$, $A = (2, 5; 0)$, и он единственен, т.к. попарные расстояния между A, B, C, D его заданы однозначно. По координатам видим, что $CD \parallel AB$, площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(AB+CD) \cdot h = \frac{1}{2}(5+4) \sqrt{15 \frac{3}{4}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{63}}{2} = \frac{9}{4} \cdot 3\sqrt{7} = \frac{27\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: четырехугольник с $BC = CD = AD = 4$, $AB = 5$, $AC = BD = 6$, его периметр 17, а площадь $\frac{27\sqrt{7}}{4}$.

№5. Чистовик.

Пусть $A = 4x^2 - 8x$, $B = x^3 + x$, $C = 2x^2 - a$. Неравенство имеет вид $A > |B+C| + |B-C|$, $|B+C| + |B-C| \geq |B+C+B-C| = 2|B|$, $|B+C| + |B-C| = |B+C| + |C-B| \geq |B+C+C-B| = 2|C|$, т.е. из $A > |B+C| + |B-C|$ следует $A > 2|B|$ и $A > 2|C|$. Докажем, что из $A > 2|B|$, $A > 2|C|$ следует $A > |B+C| + |B-C|$. Если B и C имеют противоположные знаки, то $|B+C| + |B-C| = |B| + |C| + ||B| - |C||$, если $|B| > |C|$, то это $2|B|$, если $|B| < |C|$, то $2|C|$, в любом случае меньше A . Поэтому неравенство равносильно

$$\begin{cases} A > 2|B| \\ A > 2|C| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x > |x^3 + x| \\ 2x^2 - 4x > |2x^2 - a| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-2) > |x|(1+x^2) \\ 2x(x-2) > |2x^2 - a| \end{cases}$$

Если $x > 0$, то $2x(x-2) > x(1+x^2)$, $2(x-2) > 1+x^2$, $x^2 - 2x + 5 < 0$, $(x-1)^2 + 4 < 0$ - невозможно, поэтому нет решений с $x > 0$, поэтому $x \leq 0$,

$$\begin{cases} 2x(x-2) > -x(1+x^2) \\ 2x(x-2) > |2x^2 - a| \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$x = 0$ не решение $2x(x-2) > -x(1+x^2)$, поэтому $x < 0$ и

$$\begin{cases} 2(x-2) < -(1+x^2) \\ 2x(x-2) < (2x^2 - a) \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ 2x(x-2) < 2x^2 - a \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) < 0 \\ 2x(x-2) < |2x^2 - a| \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3; 0) \\ -2x(x-2) < 2x^2 - a < 2x(x-2) \end{cases}$$

$2x^2 - a < 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 4x < a \Leftrightarrow x < \frac{a}{4}$ - верно при $a \geq 0$ на всем

$(-3; 0)$, ~~$2x^2 - a < 2x^2 - 4x$~~

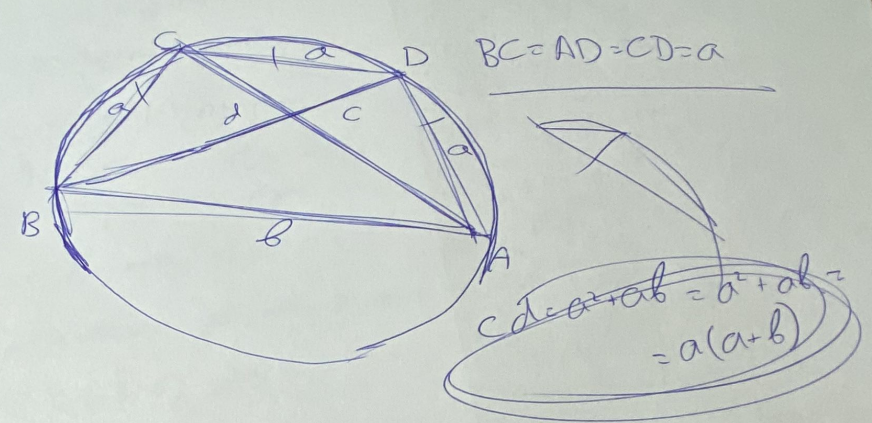
$-2x^2 + 4x < 2x^2 - a \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - a > 0$ - верно при $a \leq 0$ на всем $(-3; 0)$.

То есть при $a = 0$ $x \in (-3; 0)$ - слишком длинный интервал, при

~~$a < 0$~~ $a < 0$, $x \in (-3; 0)$ - интервал длины 2 получится только при $\frac{a}{4} = -1$,

a
 $=19$
 $x \in (3; 0)$
 $4x^2 - 4x - a > 1$
 положительны
 время Внеса и
 корни $x_1 < 0$
 имеет
 $2/B$
 $\frac{1}{4} = 1$ по
 8 у $4x^2 - 4$
 в пере
 длины 2.

Черновик:



- 4^2 16
- 5^2 25
- 6^2 36
- 7^2 49
- 8^2 64
- 9^2 81
- 10^2 100
- 11^2 121
- 12^2 144
- 13^2 169
- 14^2 196

45²

$43^2 = (40+3)^2 = 1600 + 9 + 240 = 1849$
 $45^2 = (40+5)^2 = 1600 + 25 + 400 = 2025$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Числовик.

$a = -4$. При $a > 0$ $\begin{cases} x \in (-3; 0) \\ 4x^2 - 4x - a > 0 \end{cases}$ у $4x^2 - 4x - a = 0$

один корень положительный, другой отрицательный,

т.к. по теореме Виета их произведение равно

$-\frac{a}{4} < 0$. Пусть корни $x_1 < 0$ и $x_2 > 0$. Тогда $(-3; 0) \cap ((-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)) =$

$= (-3; 0) \cap (-\infty; x_1)$ — интервал длины 2 лишь при

$x_1 = -1$, тогда $x_1 + x_2 = \frac{4}{4} = 1$ по теореме Виета, $x_2 = 1 - x_1 = 2$,

$-\frac{a}{4} = x_1 x_2 = -2$, $a = 8$ у $4x^2 - 4x - 8 > 0$ решение действительно

$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ в пересечении с $(-3; 0)$ это $(-3; -1)$ —

промежуток длины 2. Ответ: $a = -4$ или $a = 8$.