



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Быстров Павел Янович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2020/2021 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Быстров Павел Янович

Класс: 11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

* Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

лист 1

Чистовик.

Вариант 11-1

$\sqrt[n]{1}$ 6, 7, 8, ... исключите все квадраты и кубы

Найти: 2022-е число

Решение:

1) Для начала найдём число квадратов и кубов до числа 2027:

а) Наиб. квадрат: $45^2 = 2025$

Т.к. последовательность начинается с числа 6,
то исключаем $1^2; 2^2$; значит от 6 до 2027

$(45-2) = 43$ чисел являются квадратами.

б) Наиб. куб: $12^3 = 1728$

Т.к. последовательность начинается с числа 6,
то исключаем 1^3 ; значит от 6 до 2027
 $(12-1) = 11$ чисел являются кубами.

2) Проверим, не являются ли какие-то кубы
от 2 до 12 одновременно квадратами:

$2^3 = 8$ - не квадрат $3^3 = 27$ - не квадрат $4^3 = 64 = 8^2$

$5^3 = 125$ - не квадрат $6^3 = 216$ - не квадрат $7^3 = 343$ - не квадрат

$8^3 = 512$ - не квадрат $9^3 = 729 = 27^2$ $10^3 = 1000$ - не квадрат

$11^3 = 1331$ - не квадрат $12^3 = 1728$ - не квадрат

Т.к. числа 729 и 64 являются одновременно и
квадратами, и кубами, то суммарно

лист 2 Чистовик.

исключаем из последовательности
 $43+11-2 = \underline{52}$ числа,

3) Проверим, есть ли ещё квадраты и/или кубы
на $[2027; \overset{(2027+52)}{2079}]$:

т.е. кубов и/или
квадратов на этом
отрезке нет

$$\boxed{\begin{array}{l} 46^2 = 2116 \\ 13^3 = 2197 \end{array}}$$

Значит, на 2022-м месте стоит 2079.

Ответ: 2079

$$\sqrt{\frac{0}{2}} \quad (8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ} &= \frac{4\cos 50^\circ + 4\sqrt{3}\cos 40^\circ}{16\cos 40^\circ\cos 50^\circ} = \\ &= \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos 40^\circ}{4\cos 40^\circ\cos 50^\circ} = \frac{\cos 50^\circ + \sqrt{3}\cos(90^\circ - 40^\circ)}{2 \cdot 2\cos 40^\circ\cos(90^\circ - 50^\circ)} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ\right) \cdot \frac{1}{2\cos 40^\circ\sin 40^\circ} = \sin(50^\circ + 30^\circ) \cdot \frac{1}{\sin 80^\circ} = \\ &= \frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 1, \end{aligned}$$

$$\text{т.е. } \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) = \arccos 1 = 0$$

лист 3 Числовик.

$$(8x^3 + 4x^2 - 18x - 9) \cdot \arccos(x-1) \leq 0$$

$\pm(1; 2; 4; 8)$

$$-1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$$

$$x \neq \pm 1 \quad x \neq \pm 3$$

$$x \neq \pm 9 \quad x \neq \pm \frac{1}{2} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$\pm(1; 3; 9)$

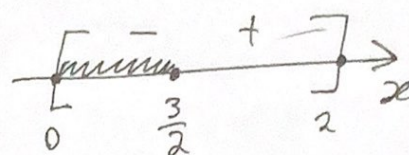
$$(2x+1)(4x^2-9) = 0$$

$$(2x+1)(2x+3)(2x-3) = 0$$

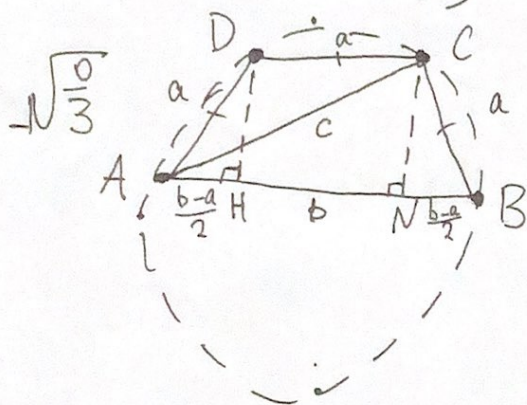
$$x = -\frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} 8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 \mid 2x+1 \\ -8x^3 + 4x^2 \\ \hline -18x - 9 \\ -18x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

Метод интервалов:



Ответ: $x \in [0; \frac{3}{2}] \cup \{2\}$.



Дано: $(O; R)$

ABCD - описанная четырехугольник

$$AD = DC = CB = a;$$

$$AB \neq AD; DC; CB; AC; DB \in \mathbb{Z}$$

Равенства - наши, возможные

Найти: R - ?

Решение:

1) Т.к. $AD = DC = CB$, то $\angle A D C = \angle D C B = \angle C B A$, значит $DC \parallel AB$, значит ABCD - параллелограмм.

2) Пусть $AB = b$; $AC = DB = c$ - диагонали. $\begin{cases} a \in \mathbb{Z}, \\ b \in \mathbb{Z}, \\ c \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

Д.п. $DH = CN$ - высоты.

$$\text{Тогда } AH = NB = \frac{b-a}{2}, \text{ тогда } AN = NH + AH = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

лист 4 Чистовик.

$$\text{У } \triangle CNB \text{ по т. Пифагора:} \\ CN^2 = BC^2 - NB^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

У } \triangle ACN \text{ по т. Пифагора:

$$c^2 = a^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$c^2 = \frac{4a^2 - b^2 + 2ab - a^2 + a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab}{4} = a^2 + ab$$

$$\begin{cases} c = \sqrt{a^2 + ab}, \\ 3a > b; \\ \uparrow \\ AD + DC + BC > AB \end{cases}$$

3) Найдем наим. значение, при котором:

$$\begin{cases} a \in \mathbb{Z}; & \text{I) Если } a=1, \text{ то} \\ b \in \mathbb{Z}; & \text{a) } b=1, \text{ тогда } c = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \\ c \in \mathbb{Z}; & \text{б) } b=2, \text{ тогда } c = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

II) Если $a=2$, то

$$\begin{aligned} \text{a) } b=1, c = \sqrt{6} \notin \mathbb{Z} & \quad \text{б) } b=3, c = \sqrt{10} \notin \mathbb{Z} \\ \text{в) } b=2, c = \sqrt{8} \notin \mathbb{Z} & \quad \text{г) } b=4, c = \sqrt{12} \notin \mathbb{Z} \\ \text{д) } b=5, c = \sqrt{14} \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

III) Если $a=3$, то а) $b=1, c = \sqrt{12} \notin \mathbb{Z}$; б) $b=2, c = \sqrt{15} \notin \mathbb{Z}$;

в) $b=3, c = \sqrt{18} \notin \mathbb{Z}$; г) $b=4, c = \sqrt{21} \notin \mathbb{Z}$; д) $b=5, c = \sqrt{24} \notin \mathbb{Z}$;

е) $b=6, c = \sqrt{27} \notin \mathbb{Z}$; ж) $b=7, c = \sqrt{30} \notin \mathbb{Z}$; з) $b=8, c = \sqrt{33} \notin \mathbb{Z}$

IV) Если $a=4$, то а) $b=1, c = \sqrt{20} \notin \mathbb{Z}$; б) $b=2, c = \sqrt{24} \notin \mathbb{Z}$;

в) $b=3, c = \sqrt{28} \notin \mathbb{Z}$; г) $b=4, c = \sqrt{32} \notin \mathbb{Z}$; д) $b=5, c = \sqrt{36} = 6 \in \mathbb{Z}$

Если $a=4$; $b=5$, то $P_{ABCD} = 3a + b = 12 + 5 = 17$;

Проверим, является ли $P_{ABCD} = 17$ наименьшим;

IV.I) Если $a=4$; $b > 5$, то $P_{ABCD} > 17$

V.) Если $a=5$, то а) $b=1, c = \sqrt{30} \notin \mathbb{Z}$; б) $b=2, c = \sqrt{35} \notin \mathbb{Z}$

VI.) Если $a=5$, $b \geq 3$, то $P_{ABCD} > 17$.

(лист 5) Числовик.

VII) Если $a \geq 6$, то $P_{ABCD} > 17$.

Таким образом, $P_{\max} = 17$.

3) Найдём R .

$$P_{ABC} = \frac{5+4+6}{2} = \frac{15}{2}$$

$$R = \frac{AB \cdot AD \cdot AC}{4\sqrt{p(p-AB)(p-AD)(p-AC)}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 6}{4\sqrt{\frac{15}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}}} = \frac{30}{\sqrt{105 \cdot 15}} = \frac{120}{\sqrt{1575}} = \frac{120}{15\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

Order: $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

$\sqrt[0]{4}$ $a_1 = \frac{4043}{2022}$, $a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n$

$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022} \leftarrow \text{Пусть } \frac{2021}{2022} = c \quad \exists |a_n| \leq \frac{2022}{2021}?$

$$a_{n+1} = a_n^3 - 3a_n^2 + 3a_n + 1 - 1 = (a_n - 1)^3 + 1, \text{ тогда}$$

$$a_1 = 1 + c; \quad a_2 = c^3 + 1; \quad a_3 = c^9 + 1; \quad a_n = c^{2^7} + 1 \dots$$

$$\dots a_n = 1 + c^{3^{n-1}} \Rightarrow a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$$

Т.к. $0 < \frac{2021}{2022} < 1$, то $|a_n| = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$

$$1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{2022}{2021} = 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \leq \frac{1}{2021}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

При больших n неравенство будет верно.

Доказано:

(лист 6) Чистовик.

Возьмём логарифм по основанию $\frac{2021}{2022}$ от обеих ч:

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$$

т.к. $0 < \frac{2021}{2022} < 1$, то

$$3^{n-1} \geq \log_{\frac{2022}{2021}} 2021$$

Возьмём логарифм по основанию 3 от обеих ч:

т.к. $3 > 1$, то

$$n-1 \geq \log_3 (\log_{\frac{2022}{2021}} 2021)$$

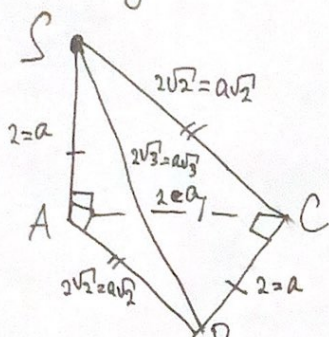
$$n \geq 1 + \log_3 (\log_{\frac{2022}{2021}} 2021), \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

Очевидно, что найдётся $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющее неравенству, а значит найдётся $|a_n| \leq \frac{2022}{2021}$

Ответ: Найдётся

(Q.E.D.)

$$\sqrt{\frac{0}{5}}$$



Дано: $SABC$ - пирамида

$\triangle ACB$ - прям; р/б; $SA = AC = BC = 2 = a$

$(SAB) \perp (ABC)$; $(SAC) \perp (ABC)$;

$(S; R)$ - сфера; $R = AB$

$(S; R)$ делит $SABC$ на 2 части

Найти: V большей части $SABC$?

Решение:

1) Из $\triangle SAC$ по т. Пифагора:

$$SC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

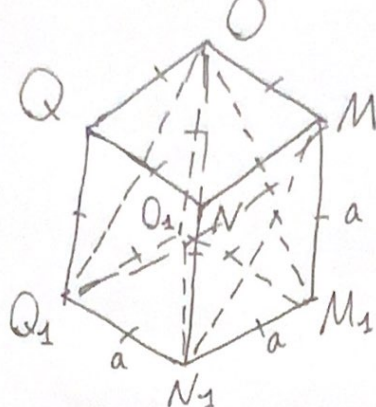
Из $\triangle ABC$ по т. Пифагора:

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; \quad (R = AB = a\sqrt{2})$$

Из $\triangle SAB$ по т. Пифагора: $SB = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.

лист 7 Чистовик.

2) Построим куб, сторона которого равна a :



Заметим, что если $QQ_1 = QN_1 = \dots = N_1M_1 = a$,

то $ON_1 = NO_1 = Q_1M_1 = M_1Q_1 = a\sqrt{3}$,

$Q_1O = QO_1 = N_1M_1 = M_1N_1 = \dots = M_1O = a\sqrt{2}$,

т.е. куб $OQNMQ_1N_1M_1$ можно разбить на некоторое число пирамид, равных $SABC$.

Найдём число таких пирамид:

Заметим, что $V_{\text{куба}} = a^3$, а $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{a^3}{6}$,

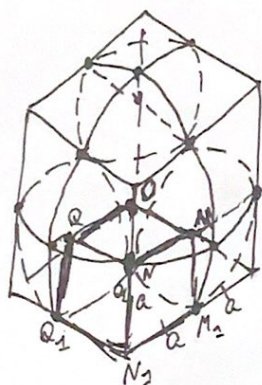
т.е. $\frac{V_{\text{куба}}}{V_{SABC}} = \frac{6}{1}$, т.е. куб $OQNMQ_1N_1M_1$ "вмещает"

в себя 6 пирамид, равных $SABC$ и пересекающихся только по граням.

3) Если O - центр сферы $(O; R_1) = (S; R)$ ($R_1 = R$), то

$(O; R_1)$ "отсекает" от куба $OQNMQ_1N_1M_1$ часть, которая в 6 раз больше меньшей части пирамиды $SABC$.

Построим куб со стороной $2a$:



Такой куб "вмещает" в себя 8 кубов $OQNMQ_1N_1M_1$,

а значит сфера $(O; R_1)$ отсекает от него часть,

объём которой в сумме равен $(8 \cdot 6) = 48$ ~~раз~~

меньшей части пирамиды $SABC$.

Примечание: сфера $(O; R_1)$ выходит за пределы куба по боковым сторонам.

меньшей части

лист 8) Чистовик.

Тогда исконая $V_{\text{большей части}} SABC$ равна $\frac{1}{48} V_{\text{полной сферы}}$, которая лежит внутри сферы $(O; R_1) = (S; R)$, т.е.

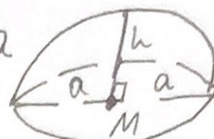
$$V_{\text{большей части}} = \frac{1}{48} (V_{\text{сферы}} - 6 V_{\text{шар. сегмента}})$$

$$V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$R_1 = R = a\sqrt{2} \text{ (из 1)},$$

$$V_{\text{шар. сегмента}} = \pi \cdot h^2 \left(R_1 - \frac{h}{3} \right)$$

$$h = R_1 - a = a\sqrt{2} - a$$



тогда $V_{\text{сферы}} = \frac{4}{3} \pi (a\sqrt{2})^3 =$

$$= \frac{4 \cdot 2\sqrt{2} a^3 \cdot \pi}{3} = \frac{a^3 \pi \cdot 8\sqrt{2}}{3}$$

$$V_{\text{шар. сегмента}} = \pi (a\sqrt{2} - a)^2 \left(a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2} - a}{3} \right) =$$

$$= \pi \cdot (3a^2 - 2\sqrt{2}a^2) \left(\frac{2\sqrt{2}a + a}{3} \right) =$$

$$= \pi \cdot \frac{6\sqrt{2}a^3 + 3a^3 - 8a^3 - 2\sqrt{2}a^3}{3} = \pi \cdot \frac{4\sqrt{2}a^3 - 5a^3}{3} = \frac{a^3 \pi (4\sqrt{2} - 5)}{3}$$

$$V_{\text{большей части}} = \frac{1}{48} \left(\frac{a^3 \pi \cdot 8\sqrt{2}}{3} - 6 \cdot \left(\frac{a^3 \pi (4\sqrt{2} - 5)}{3} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{48} \left(\frac{a^3 \pi \cdot 8\sqrt{2}}{3} - a^3 \pi (8\sqrt{2} - 10) \right) = \frac{1}{48} \cdot \frac{a^3 \pi (30 - 16\sqrt{2})}{3} =$$

$$= \frac{a^3 \pi (15 - 8\sqrt{2})}{72} \cdot \boxed{\text{Т.к. } a=2}, \text{ то } \frac{8\pi (15 - 8\sqrt{2})}{72} = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$$

Докажем, что $V = \frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9}$ — действительно объём
большей части пирамиды $SABC$.

$$\frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} V_{SABC}$$

$$\frac{\pi (15 - 8\sqrt{2})}{9} \stackrel{?}{=} \frac{2}{3}$$

$$V_{SABC} = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$$

лист 9 Чистовик.

$$\frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9} \gg \frac{2}{3}$$

Q.E.D.

$$15-8\sqrt{2} \gg \frac{18}{3\pi}$$

$$15-8\sqrt{2} > 3$$

$$3 \gg \frac{18}{3\pi} \Rightarrow \pi > \frac{18}{9} = 2$$

Ответ: В болевый расч. $S_{ABC} = \frac{\pi(15-8\sqrt{2})}{9}$

$$\sqrt{6} \quad |x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| \leq 4x^2+8x,$$

Найти: при каких a мно-во решений = промежутку длиной 1?

Решение:

1) Раскроем модуль всеми возможными способами:

$$++ \quad \underline{x^3+2x^2+x+a} + \underline{x^3-2x^2+x-a} = 2x^3+2x$$

$$+- \quad \underline{x^3+2x^2+x+a} - \underline{x^3-2x^2+x-a} = 4x^2+2a$$

$$-+ \quad \underline{-x^3-2x^2-x-a} + \underline{x^3-2x^2+x-a} = -4x^2-2a$$

$$-- \quad \underline{-x^3-2x^2-x-a} - \underline{x^3+2x^2+x+a} = -2x^3-2x$$

$$\begin{cases} 4x^2+8x > 2x^3+2x, \\ 4x^2+8x > 4x^2+2a, \\ 4x^2+8x > -4x^2-2a, \\ 4x^2+8x > -2x^3-2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-4x^2-6x < 0, \\ 8x > 2a, \\ 8x^2+8x+2a > 0, \\ 2x^3+4x^2+10x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-2x-3) < 0, \\ x > \frac{a}{4}, \\ 4x^2+4x+a > 0, \\ x(x^2+2x+5) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-3)(x+1) < 0, \\ x > \frac{a}{4}, \\ 4x^2+4x+a > 0, \\ x(x^2+2x+5) > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (0; 3), \\ x > \frac{a}{4}, \\ (2x+1)^2 + a - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0; 3), \\ x > \frac{a}{4}, \\ (2x+1)^2 > 1-a; \end{cases}$$

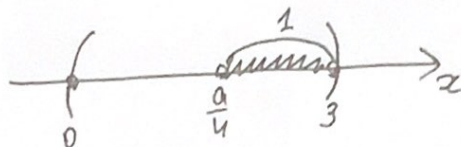
$D = 4-20 < 0$

лист 10) Цистовик.

$$\begin{cases} x \in (0; 3), \\ x > \frac{a}{4}, \\ (2x+1)^2 > 1-a; \end{cases}$$

① Если $a > 1$, то $(2x+1)^2 > 1-a$

тогда $\begin{cases} x \in (0; 3), \\ x > \frac{a}{4}; \end{cases}$



Чтобы решение ~~было~~ = промежутку длиной 1,

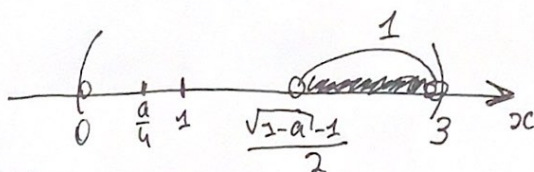
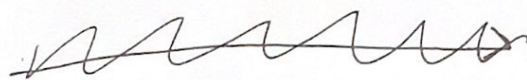
то при $a > 1$ $3 - \frac{a}{4} = 1 \rightarrow \frac{a}{4} = 2 \rightarrow \boxed{a = 8}$

② Если $a \leq 1$, то $\begin{cases} 2x+1 > \sqrt{1-a}, \\ \cancel{2x+1 < -\sqrt{1-a}}, \end{cases}$

т.к. $x \in (0; 3)$, то $2x+1 > \sqrt{1-a}$,

$$x > \frac{\sqrt{1-a}-1}{2},$$

тогда $\begin{cases} x \in (0; 3), \\ x > \frac{a}{4}, \\ a \leq 1, \\ x > \frac{\sqrt{1-a}-1}{2}. \end{cases}$



Чтобы решение = промежутку длиной 1,

то при $a \leq 1$

$$3 - \frac{\sqrt{1-a}-1}{2} = 1$$

$$\frac{\sqrt{1-a}-1}{2} = 2$$

$$\sqrt{1-a} = 5$$

$$1-a = 25$$

$$\boxed{a = -24}$$

Ответ:
при $\begin{cases} a = 8, \\ a = -24; \end{cases}$

лист 11

Черновик.

~~119~~

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 225 \\ + 180 \\ \hline 2025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 127 \\ \times 127 \\ \hline 1549 \\ + 1270 \\ \hline 16129 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ + 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ + 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ + 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 146 \\ \hline 3092 \\ + 1460 \\ \hline 21236 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 36 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 8 \\ \hline 512 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$2^3=8 \quad 3^3=27 \quad 4^3=64=8^2$$

$$5^3=125 \quad 6^3=216 \quad 7^3=343$$

$$8^3=512$$

$$9^3=729=27^2 \quad 10^3=1000$$

$$11^3=1331 \quad 12^3=1728$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$8 \cdot 27 + 36 - 54 - 9 \neq 0$$

$$8 \cdot 729 + 4 \cdot 81 - 162 - 9 \neq 0$$

$$1 + 1 - 9 - 9 \neq 0$$

$$-1 + 1 + 9 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \times 15 \\ \hline 525 \\ + 105 \\ \hline 1575 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 7 \\ \hline 1575 \end{array}$$

$$\frac{a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}-a}{3}}{2\sqrt{2}+a} =$$

$$a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = 2a^2 \cdot a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$$

$$\frac{a^3 \pi \cdot 8\sqrt{2}}{3} - 6 \left(\frac{a^3 \pi (4\sqrt{2}-5)}{3} \right) = \frac{a^3 \pi \cdot 8\sqrt{2}}{3} - a^3 \pi (8\sqrt{2}-10) =$$

$$= \frac{a^3 \pi (8\sqrt{2} - 24\sqrt{2} + 30)}{3} = \frac{a^3 \pi (30 - 16\sqrt{2})}{3}$$

$$24 \cdot 3 = 72$$