



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Шекера Артём Борисович**

Класс: **9**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Шекера Артём Борисович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

№5.

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

Данное уравнение имеет решение только тогда, когда дискриминант $\Delta \geq 0 \Rightarrow a^2 - 4 \cdot 2022 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 8088$. В целых неотрицательных числах это возможно только равно

равносильно $a \geq 90$. А при всех $a \geq 90$ сумма корней равна $-a$, то есть общая сумма $-(90+91+\dots+99) = -945$.

Ответ: -945 .

№2.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 10b - 10c + c - b = 9(b - c)$$

$$9(b - c) : 72$$

$$b - c : 8$$

$$b = 8 \quad c = 0$$

$$b = 9 \quad c = 1$$

$$b = 0 \quad c = 8$$

$$b = 1 \quad c = 9$$

Всего 4 варианта на b и c , подходящие условию, т.к. b и c — цифры, $0 \leq b, c \leq 9$. Заметим, что от a ничего не зависит, то есть для каждой подходящей пары b и c есть 9 вариантов a .
Значит всего вариантов $9 \cdot 4 = 36$.

Ответ: 36 чисел.

№4.

Ответ: 7.

Из двух видов следует, что у нас есть как минимум 3 башни высоты 3, 2 высоты 2 и 2 высоты 1. То есть минимум 7.

Примечание:

на примере показаны цифрами клетки, в которых стоят кубики на виде сверху. Цифра означает кол-во кубиков в данном столбце.

Стрелки показывают направление видов: вертикальная — спереди, горизонтальная — сбоку.

лист 1 из 3

1	1				
2				2	
3	3				
3			3		3
2		2			
1	1				
	3	2	3	2	3



№1.
Обозначим кол-во работников за y , а их производительность (сколько урядок вскопает 1 работник за 1 день) за x .

Тогда $y > 7$, $xy = 10$, $\frac{7x}{2} \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{10}{y} \Rightarrow x < \frac{10}{7} \Rightarrow \frac{7x}{2} < 5$$

$$n = \frac{7x}{2}$$

$$n = \frac{70}{2y}$$

$$n = \frac{35}{y}$$

$n, y \in \mathbb{N}$ ($n, y \in \mathbb{Z}$; xy - кол-во $\Rightarrow$ нет., $\Rightarrow n > 0, n \in \mathbb{N}$)

$$n \in \{1, 5, 7, 35\}, n < 5$$

$$n = 1; 10 + 1 = 11$$

$$\frac{7x}{2} = 11 \quad \text{Ответ: 11.}$$

$$x = \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{35}{1} = 35 \quad (x+y)(x+y+1) + y = 2022$$

Пусть $n = x+y$, тогда $n \in \mathbb{N}$, $n > 7$

$$n(n+1) + y = 2022$$

$$2022 > n(n+1)$$

$$2022 - n(n+1) < n \Rightarrow 2022 < n(n+2)$$

~~$n \geq 45$~~ При $n \geq 45$ $n(n+1) \geq 45 \cdot 46 \geq 2070 > 2022 \Rightarrow$ не подходит

При $n \leq 43$ $n(n+2) \leq 43 \cdot 45 \leq 1935 < 2022 \Rightarrow$ не подходит

$$\Rightarrow n = 44.$$

$$44 \cdot 45 = 1980$$

$$y = 2022 - 1980 = 42 < 44$$

$$x = n - y = 2$$

$$(2+42)(2+42+1) + 42 = 2022$$

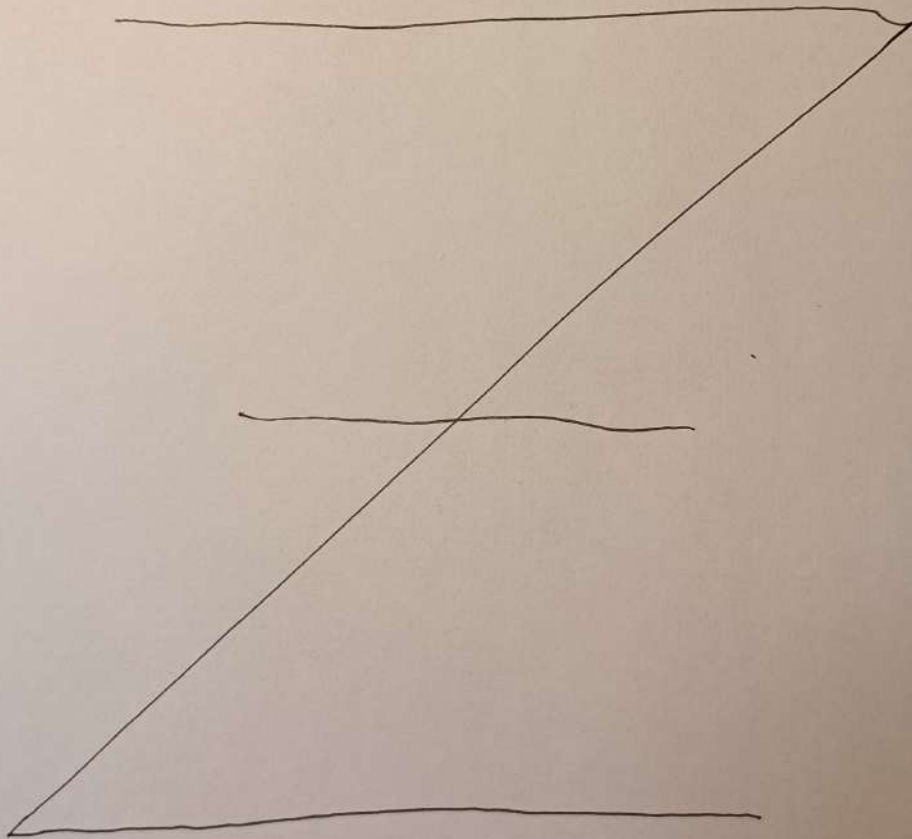
Ответ: $x=2$; $y=42$.

№6.

Рассмотрим планеты А и В, между которыми наибольшее расстояние по кол-ву портов; (расстояние при переходе от А до В, только в одну сторону)

мст 2 из 3

Тогда:
 Из А выходит 40 порталов. Среди 40 планет, на которые эти порталы
 выводят, может быть проведено не более $\frac{40 \cdot 39}{2}$ порталов. Значит из этих
 планет выходит еще минимум $40 - 40 - \frac{40 \cdot 39}{2} = 20 \cdot 41$ порталов. Так как
 в одну планету входит не более 40 порталов, 20 · 41 порталов входят в
 минимум 20 различных планет. Таким образом, ~~возле~~ за 2 перехода
 мы гарантированно можем попасть из планеты А в 60 различных планет.
 Из условия про 40 порталов, обязательно ведущих на одну планету, следует,
 что из одной из 61 планеты мы гарантированно можем попасть на любую
 другую за 1 ход. То есть мы можем из любой планеты в любую мы
 можем попасть за 3 или меньше шагов. Возможность существования
 ситуации с тремя шагами следует из предыдущей части, док-во
 существования ситуации с одним или двумя шагами тривиально.
 Ответ: 1, 2 или 3.





Черновик лист 1 из 2

$$abc - acb = 72$$

$$100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 72$$

$$10(b-c) + c - b = 72$$

$$9(b-c) = 72$$

$$b-c = 8$$

$$9 \mid$$

$$8 \mid$$

$$(x+y)(x+y+1)+y-2022$$

$$x^2+xy+x+xy+y^2+y+y-2022$$

$$x^2+2xy+y^2+x+2y$$

$$y=1$$

$$y=2$$

$$x+y=1$$

$$x=0$$



$$2022 - x^2 - 2xy$$

$$2022 - y^2 - 2y = x$$

$$x^2 - ax + 2022 = 0$$

$$a^2 = 4 \cdot 2022$$

$$a = 80.88$$

$$\frac{10}{8} = 1.25$$

$$x = 1.55$$

$$y = \frac{10}{8} \cdot \frac{10}{10}$$

$$3.5x \in \mathbb{Z}$$



$$5 \cdot 180$$

$$\frac{44}{189}$$

$$\frac{4}{5}$$

$$9 \mid 45$$

$$3.5x = 1 \quad x = \frac{2}{7}$$

$$3.5x = 2 \quad x = \frac{4}{7}$$

$$3.5x = 3 \quad x = \frac{6}{7}$$

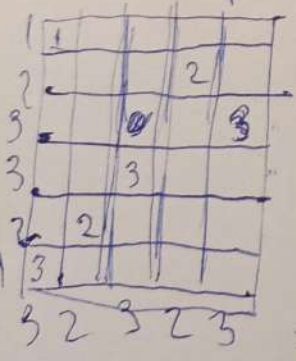
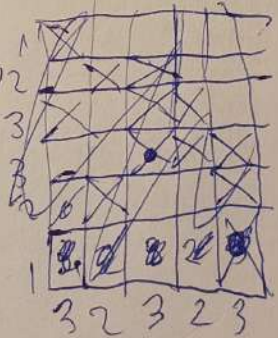
$$2x + 2y = 10$$

$$x + y = 5$$

$$\frac{2}{7}x = 102$$

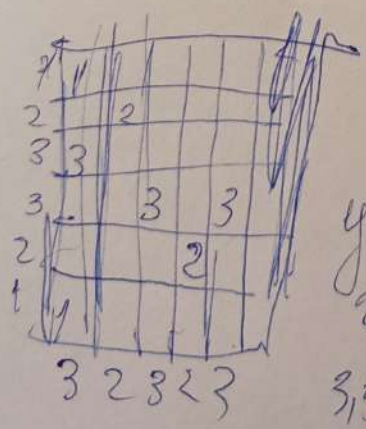
$$nx = 35$$

$$n = \frac{35}{2}$$



$$3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 15$$

$$\frac{10}{7} \cdot \frac{7}{2} = 5$$



$$xy = 10$$

$$y > 4$$

$$x < \frac{10}{7}$$

$$\frac{8}{7}y = 10$$

$$y = \frac{70}{8} = \frac{35}{4}$$

$$3.5x \in \mathbb{Z}$$

$$3.5 \cdot \frac{10}{7} = 5$$

$$3.5x \leq 4$$

$$3.5x = 4$$

$$x = \frac{8}{7}$$

черновик лист 2 из 2.

$$n(n+1)+y=2022$$

$$y < n$$

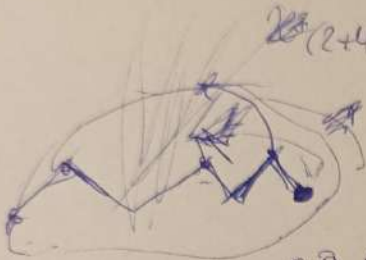
$$2022 - n(n+1) < n$$

$$n(n+1) < 2022 < n(n+2)$$

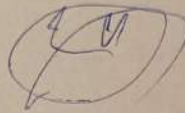
$$n^2 + n < 2022 < n^2 + 2n$$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\cancel{43}} \quad \overset{3}{\cancel{44}} \quad \overset{4}{\cancel{45}} \\ \times \overset{1}{\cancel{43}} \quad \times \overset{2}{\cancel{44}} \quad \times \overset{3}{\cancel{45}} \\ \hline 180 \quad 1980 \quad 180 \\ 2025 \quad + \quad 2070 \\ \hline 42 = 2024 \end{array}$$

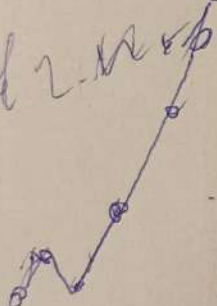
$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{43}} \quad \overset{2}{\cancel{44}} \\ \times \overset{1}{\cancel{43}} \quad \times \overset{2}{\cancel{44}} \\ \hline 180 \quad 1980 \\ 2025 \quad + \quad 2070 \\ \hline 42 = 2024 \end{array}$$



$$\begin{array}{c} 22 \quad 39 \quad 39 \\ 42 \quad 40 \end{array}$$



$$20(2 \cdot 40 + 39) = 20 \cdot 119$$



$$40 \cdot 39 \quad 20 \cdot 39$$

$$\frac{40 \cdot 39}{2} = 20 \cdot 39$$

$$\frac{40 \cdot 39}{2}$$

$$40 \cdot 195$$

$$20(2 \cdot 40 + 39) = 20 \cdot 119$$