



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Илюхин Лев Владимирович**

Класс: **10-11**

Технический балл: **80**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Илюхин Лев Владимирович

Класс: 10-11

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
20 баллов	20 баллов	20 баллов	20 баллов	0 баллов	0 баллов	80 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.

Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.

Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Ученик

√3

Баған 11-1

Дано: $AB = BC = CD$

P-min

Найти: AP

R

Решение: 1) $AB = BC = CD = x$

$AD = y$

$\angle CBD = \angle CDB = \alpha$ (м.к. $\triangle BCD$ -равн.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCD = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle BAD = 2\alpha$ (м.к. $\triangle ABCD$ впис.)

$\angle ADB = \beta$, $\angle ABD = 180^\circ - 2\alpha - \beta \Rightarrow \angle ABC = 180^\circ - 2\alpha - \beta$

2) Запишем теорему косинусов для $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$:

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 2\cos(180^\circ - 2\alpha)x^2 = BD^2 \\ x^2 + y^2 - 2\cos(2\alpha)xy = BD^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 2\cos(180^\circ - 2\alpha)x^2 = BD^2 \\ x^2 + y^2 - 2\cos(2\alpha)xy = BD^2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2\cos(2\alpha)x^2 = y^2 - 2\cos(2\alpha)xy$$

$$2\cos(2\alpha)x(x+y) = (y-x)(y+x)$$

$$y+x \neq 0 \Rightarrow 2\cos(2\alpha)x = y-x$$

$$\cos 2\alpha = \frac{y-x}{2x}$$

3) Запишем теорему косинусов $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$:

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 2\cos(180^\circ - 2\alpha - \beta)x^2 = BD^2 \\ x^2 + y^2 - 2\cos(\alpha + \beta)xy = BD^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 2\cos(180^\circ - 2\alpha - \beta)x^2 = BD^2 \\ x^2 + y^2 - 2\cos(\alpha + \beta)xy = BD^2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2\cos(\alpha + \beta)x^2 = y^2 - 2\cos(\alpha + \beta)xy$$

$$2\cos(\alpha + \beta)x(x+y) = (y-x)(y+x)$$

$$y+x \neq 0 \Rightarrow 2\cos(\alpha + \beta)x = y-x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{y-x}{2x}$$

(1)

$$4) \begin{cases} \cos 2\alpha = \frac{y-x}{2x} \\ \cos(\alpha+\beta) = \frac{y-x}{2x} \Rightarrow \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \triangle ABCD - \text{равнобедренный}$$

$2\alpha < 180^\circ$
 $\alpha + \alpha < 180^\circ$

5) м.к. $\alpha = \beta$, то $\angle ABC = 180 - 2\alpha$; $\angle BAD = 2\alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow \square ABCD$ - параллелограмм.

$$6) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\cos(2\alpha)xy = BD^2 \\ 2\cos(2\alpha)x = y - x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - (y-x)y = BD^2$$

$$x^2 + y^2 - y^2 + xy = BD^2$$

$$x^2 + xy = BD^2$$

$$x(x+y) = BD^2$$

$$BD = AC$$

$x(x+y) > 1$ в натуральных числах $\Rightarrow BD \geq 1$

7) $BD = 2 \Rightarrow x(x+y) = 4$; единственные решения в натуральных числах - $x=1, y=3$, но тогда для $\triangle ABD$ не выполняется нер-во

8) $BD = 3 \Rightarrow x(x+y) = 9$; единств. реш. в нат. числах: $x=1, y=8$, но для $\triangle ABD$ не выполн. нер-во

9) $BD = 4 \Rightarrow x(x+y) = 16$; единств. реш. в нат. числах: $x=1, y=6$, для $\triangle ABD$ не выполн. нер-во

10) $BD = 5 \Rightarrow x(x+y) = 25$; единств. реш. в нат. числах: $x=1, y=24$, для $\triangle ABD$ не выполн. нер-во $\triangle$ (2)

71) ^{Числа} $BD = 6$

$$x(x+y) = 26 \cdot 36$$

если $x \leq 3$, то $y \geq 9$, $x+6 \leq y \Rightarrow$ для $\triangle ABD$ не выполняется нер-во $\triangle$.

$$\Rightarrow x = 4 ; y = 5$$

$$P = 3x + y = 12 + 5 = 17$$

12) Заметим, что $P < AC + BD \neq 2BD$ (из н-в. $\triangle$ для $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$).

13) $BD = 7$

$$x(x+y) = 49$$

единств. решение в нат. числах $x=1$; $y=48$
не выполн. нер-во $\triangle$ для ABD

14) $BD = 8$

$$x(x+y) = 64$$

$x \leq 4$; $y \geq 12$; $x+8 < y \Rightarrow$ для $\triangle ABD$ не выполняется нер-во $\triangle$.

15) при $BD=9$ $2B > 17 \Rightarrow P > 17 \Rightarrow P=17$ и есть минимальный периметр.

16) $\Rightarrow x = 4$; $y = 5$

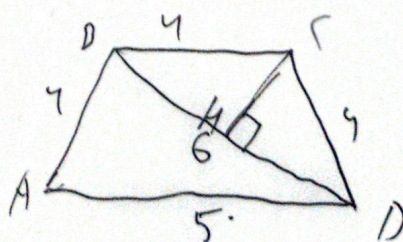
$$CH \perp BD$$

$$HD = 3$$

$$CH = \sqrt{26 - 9} = \sqrt{17}$$

$$\Rightarrow S(BD) = 3\sqrt{17}$$

$$S(CBD) = \frac{CB \cdot CD \cdot BD}{4R}$$



$$3\sqrt{17} = \frac{24}{R}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

Ответ: 17

(3)

Числота

✓4

$$a_1 = 1 + \frac{2021}{2022}$$

$$\text{Пусть } \Delta a = \frac{2021}{2022}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= (1 + \Delta a)^3 - 3 \cdot (1 + \Delta a)^2 + 3(1 + \Delta a) = 1 + 3\Delta a + \\ &+ 3\Delta a^2 + \Delta a^3 - 3 - 6\Delta a - 3\Delta a^2 + 3 + 3\Delta a = \\ &= 1 + \Delta a^3 \end{aligned}$$

Тогда по индукции получим, что $a_n = 1 + \Delta a^{3(n-1)}$

$$1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)} \leq 1 + \frac{1}{2021}$$

$$\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)} \leq \frac{1}{2021}$$

Заметим, что так как $\frac{2021}{2022} < 1$, то $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)}$ монотонно убывает при $n > 1$, и при $n \rightarrow \infty$, $\left(\frac{2021}{2022}\right)^{3(n-1)} \rightarrow 0$.
то при $n \geq 1 + \frac{1}{3} \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$ неравенство будет верным

Ответ: да, при $n \geq 1 + \frac{1}{3} \log_{\frac{2021}{2022}} \frac{1}{2021}$ неравенство будет верным

Численно

$\sqrt{2}$

Рассмотрим правую часть нерав-ва:

$$\arccos\left(\frac{1}{4\cos 40^\circ} + \frac{\sqrt{3}}{4\cos 50^\circ}\right) - \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}\cos 50^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ}{2\cos 40^\circ \cdot 2\cos 50^\circ}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\cos 60^\circ \cdot \cos 50^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 50^\circ}{2\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ}\right) =$$

$$= \arccos\left(\frac{\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}\right) = \arccos\left(\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}\right) = \arccos(1) =$$

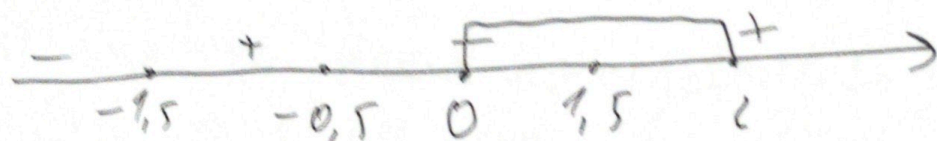
$= 0$

Теперь рассмотрим левую часть ур-ния:

ОДЗ: $x \in [0; 2]$

$$8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 4x^2 \cdot (2x+1) - 9(2x+1) =$$

$$= (2x-3)(2x+3)/(2x+1); \text{ Выпуклость на интервале}$$



$$\arccos(x-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{при } x \in [0; 1.5] \cup \{2\} \text{ нер-во}$$

выполняется (т.к. при $x \in [0; 1.5]$ мы умножаем отриц. на полож. и получаем слева отриц., а справа 0 $\Rightarrow$ нер-во выполняется, при $x=2$ $\arccos(x-1)=0$ $\Rightarrow$ левая часть $=0 \Rightarrow$ нер-во выполняется и верно)

(5)

✓

Умножение $\sqrt{1}$
1) Если не убирать элементы, то 2022-ой элемент
будет 2027. Найдём сколько квадратов есть до
2027: $45 \cdot 45 = 45^2 = 2025$
 $46^2 = 2116 \Rightarrow$ до 2027 есть
45 квадратов

2) Найдём, сколько кубов до 2027:

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197 \Rightarrow 12 \text{ кубов}$$

3) мы посчитали по два раза числа в 6-ой
степени. Найдём, сколько их:

$$3^6 = 729$$

$$4^6 = 4096 \Rightarrow \{ \text{числа в 6-ой степени}$$

4) так же наша последовательность начинается
с 6, а до нее есть еще два числа являющиеся
квадратами или кубами: 1 и 4

5) $\Rightarrow$ всего чисел, которые надо исключить

$$45 + 12 - 3 - 2 = 52. \Rightarrow \text{после того как}$$

исключат их 2022 элемент станет 2079

6) Запомним, что до 2079 столько же кубов и
квадратов, сколько и до 2027 (т.к. $2079 < 13^3, 2079 < 46^2$)

$\Rightarrow$ ничего больше исключать не надо $\Rightarrow$ 2022-ой
элемент - 2079

Ответ: 2079

6

Умножить $\sqrt{6}$.

1) Полагая $X = 3$

$$|27 + 18 + 3 + a| + |27 - 18 + 3 - a| = |48 + a| + |12 - a|$$

$$|48 + a| + |12 - a| < 60$$

II) ~~при $a > -48$: $48 + a$~~ ~~$-48 - a$~~
при $a \in [-48; 12]$ 3-ка всегда будет корнем.

2) $f_1 = x^3 + 2x^2 + x + a$

$$f_2 = x^3 - 2x^2 + a - 9$$

$$f_1' = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow f_1 \text{ монотонно } \uparrow \text{ при } x > -\frac{1}{3}$$

$$f_2' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f_2 \text{ монотонно } \uparrow \text{ при } x > 1$$
$$\Rightarrow x > 1$$

3) корни 3 не зависят от a

$$x(x-1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow \text{отрезок решения}$$

$$x \in [2; 3]$$

$$-4x^2 - 4 \leq 4x^2 + 8$$

$$x = 2$$

$$a = -24$$

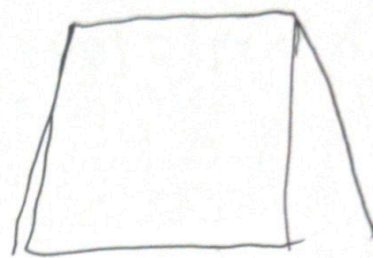
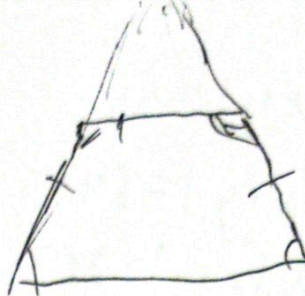
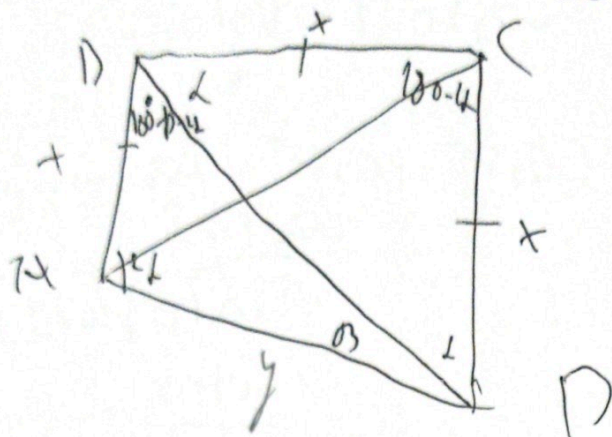
$$\text{Ответ: } a = -24$$

7

Чертёж

$\sqrt{3}$

$x=2$
 $y=1$



$2x^2$

7



$$x^2 + x^2 - 2 \cos(180 - 2\alpha) x^2 = x^2 + y^2 - 2 \cos(2\alpha) xy$$

$$x^2 + 2 \cos(2\alpha) x^2 = y^2 - 2 \cos(2\alpha) xy$$

$$2 \cos(2\alpha) x(x+y) = (y-x)(y+x)$$

$$2 \cos(2\alpha) x = y - x$$

$$BD^2 = x^2 + y^2 + (x-y)xy$$

$$BD^2 = x^2 + y^2 + xy - y^2 = x^2 + xy = x(x+y)$$

$$x^2 + x^2 + 2 \cos(\alpha + \alpha) x^2 = x^2 + y^2 - 2 \cos(\alpha + \alpha) xy$$

$$x^2 + 2 \cos(\alpha + \alpha) x^2 = y^2 - 2 \cos(\alpha + \alpha) xy$$

$$2 \cos(\alpha + \alpha) x(x+y) = (x+y)(y-x)$$

$$2 \cos(\alpha + \alpha) x = y - x$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha$$

$$x(x+x) < 3 \cos 2\alpha BD^2$$

$$x^2 < \frac{3 \cos 2\alpha}{2} BD^2$$

$$x < \frac{BD}{\sqrt{2}}$$

symmetrisch

$$x|x+y| = 49$$

$$x|x+y| = 64$$

$$x|x+y| = 81$$

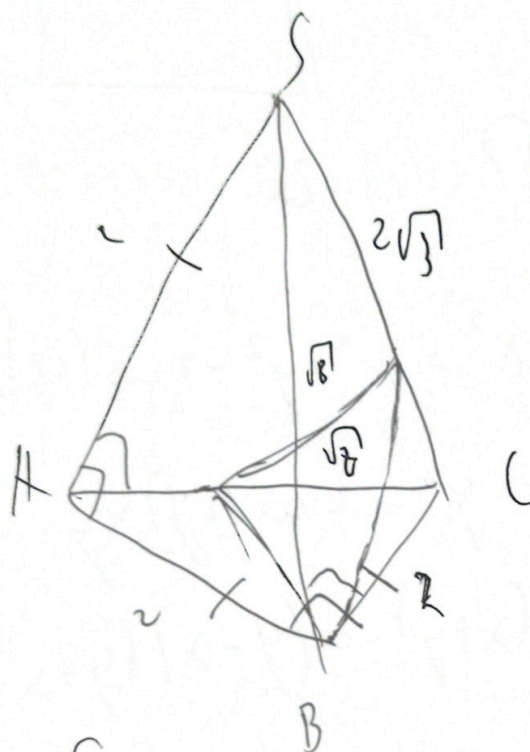
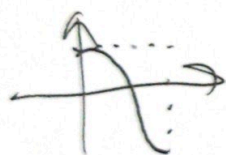
$$x|x+y| = 100$$

~~arccos~~ (sin)

$$\cos 50^\circ \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 50^\circ$$

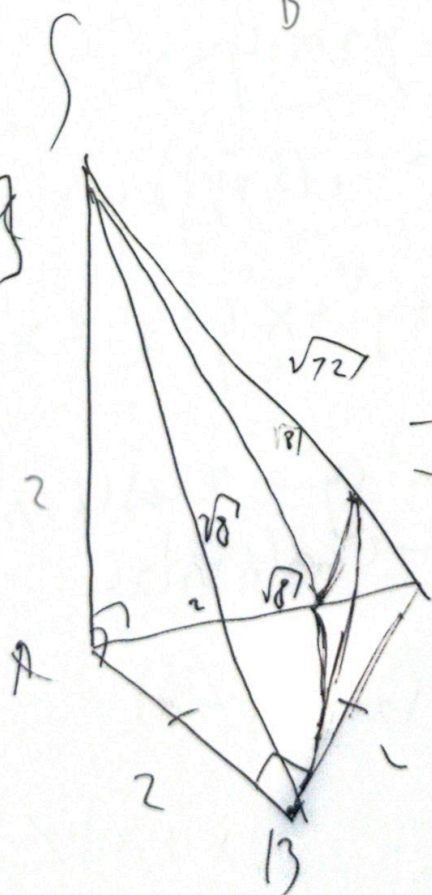
$$\begin{aligned} \cos 50^\circ \cdot \cos 60^\circ + \sin 50^\circ \cdot \sin 60^\circ &= \\ &= \frac{\cos 10^\circ}{8 \cos(40^\circ) \cdot \sin(40^\circ)} = \\ &= \frac{\cos 10^\circ}{4 \cdot \sin 80^\circ} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\cos(k-\pi) = \cos k \cos \pi + \sin k \sin \pi$$

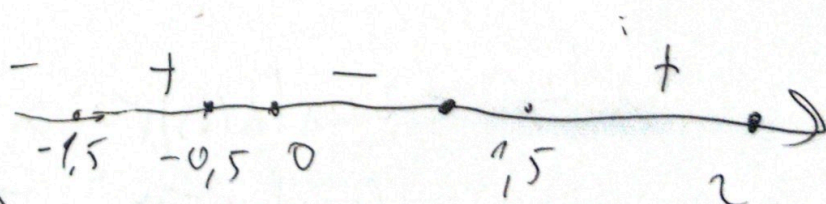


$$x \in \left[1, \frac{11}{4}\right]$$

$$x \in [0, 2]$$



$$\begin{aligned} 9x^2 / (2x+1) - 9(2x+1) &= \\ &= (2x+1)(2x-3)(2x+3) \end{aligned}$$



Чепнобурк.

2027

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 45 \\ \hline 2025 \end{array}$$

45 kb

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ \times 6 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ + 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

3⁶ = 963 3.3.3.3.3.3 = 9.9.9 = 81.9

4⁶ = 16.16.16 = 256.16

45 + 12 - 3 - 2 = 52

2079

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 9 \\ \hline 729 \end{array}$$

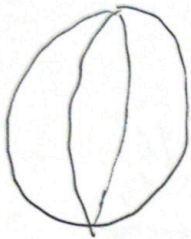
$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 16 \\ \hline 1536 \\ + 256 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ + 184 \\ \hline 2116 \end{array}$$

1234

Умножить.

$$\frac{4}{5} \cdot \pi \cdot 8\sqrt{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4\sqrt{8}\pi}{5}$$



упробна

~~упробна~~

$$4x \mid x+2$$

$$(27+18+3+a) + (27-18+3-a) \sqrt{36+24}$$

$$(48+a) + (12-a) \sqrt{60}$$

$$\cancel{x^3} + 2x^2 + \cancel{x} + a - \cancel{x^3} + 2x^2 - \cancel{x} + a < 4x^2 + 8x$$

$$4x^2 + 2a < 4x^2 + 8x$$

$$2a < 8x$$

$$\begin{cases} a < 4x \\ x^3 - 2x^2 + x - a < 0 \\ x^3 + 2x^2 + x + a > 0 \end{cases}$$

$$-4x^2 - 2a < 0$$

$$2x^2 + a > 0$$

$$2x^2 > -a$$

$$a=4$$

$$a=0, 2x$$

$$x > 1$$

$$x \geq 0$$

Черновик ✓6

$$1) x^3 + 2x^2 + x + 9 + x^3 - 2x^2 + x - 9 \leq 4x^2 + 8x$$

$$f_1 = x^3 + 2x^2 + x + 9$$

$$f_2 = x^3 - 2x^2 + x - 9$$

$$f_1' = 3x^2 + 4x + 1, \Rightarrow f_1 \text{ монотонно } \uparrow \text{ при } x > -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$f_2' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f_2 \text{ монотонно } \uparrow \text{ при } x > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{на интервале монотонно } \uparrow \text{ при } x > 1$$