



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Гурова Татьяна Алексеевна**

Класс: **9**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Гурова Татьяна Алексеевна

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	10 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

Может переформулировать

Числовик

Задача N1

Пусть изначально было a рабочих. Тогда $a > 7$ и скорость одного рабочего равна $\frac{10}{a}$ з./г.

Тогда за половину рабочего две один рабочий выполняет $\frac{10}{a} \cdot 0,5 = \frac{5}{a}$ зредок. Тогда 7 рабочих за половину рабочего две

выкопают $7 \cdot \frac{5}{a} = \frac{35}{a}$ зредок.

Тогда всего было выкопано $10 + \frac{35}{a}$ зредок. По условию

это натуральное число $\Rightarrow \frac{35}{a}$ натуральное число $\Rightarrow 35$ должно

делиться на a . 35 делится на числа 1, 5, 7 и 35. По условию

$a > 7 \Rightarrow a = 35$. Тогда всего зредок на участке было

$$10 + \frac{35}{35} = 10 + 1 = 11.$$

Отвеч: 11 зредок.

Задача N2.

Число $\overline{abc}$ можно представить как $100a + 10b + c$ Число $\overline{acb}$ можно представить как $100a + 10c + b$

$$\text{тогда } \overline{abc} - \overline{acb} = (100a + 10b + c) - (100a + 10c + b) = 9b - 9c = 9(b - c)$$

По условию $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 72

$$\Rightarrow 9(b - c) : 72$$

разность $b - c$ может равняться от -9 до 9 .из всех этих чисел только $9(b - c)$ делится на 72 нам подходят только $-8; 0; 8$ $\Rightarrow$ нам нужно подобрать такие числа b и c что либо $b - c = -8$ либо $b - c = 0$ либо $b - c = 8$ при этом заметим что данная разность $\overline{abc} - \overline{acb}$ не зависит от a $\Rightarrow a$ может быть любой цифрой от 1 до 9 (0 не подходит

т.к. у числа на первом месте не может стоять 0)

если $b - c = -8$ то либо $b = 1$ $c = 9$ либо $b = 0$ $c = 8 \Rightarrow 2$ варианта b и c если $b - c = 0 \Rightarrow b = c$ тогда b и c любые цифры от 0 до 9 $\Rightarrow 9$ вариантов b и c если $b - c = 8$ то либо $b = 9$ $c = 1$ либо $b = 8$ $c = 0 \Rightarrow 2$ варианта b и c $\Rightarrow$ всего возможных вариантов чисел b и c 13всего возможных вариантов числа a 9Тогда кол-во 3-значных чисел для которых выполняется условие будет перемножением возможных вариантов чисел b и c и возможных вариантов числа a , то есть $9 \cdot 13 = 117$

Ответ: 117.

Заметим что $(x+y)(x+y+1)$ всегда четное т.к. либо $x+y:2$ либо $x+y+1:2$

$\Rightarrow$ т.к. 2022 четное $(x+y)(x+y+1)$ четное то и число y должно быть четным

Заметим что $x+y \geq y+1$ и $x+y+1 \geq y+2$

$$\Rightarrow (y+1)(y+2)+y \leq 2022$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 2 \leq 2022$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 2020 \leq 0$$

$$D = 4^2 + 4 \cdot 2020 = 8096$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} \approx 90$$

$$\text{Тогда } y \leq \frac{-4+90}{2} = 43$$

~~$\Rightarrow$ т.к. y - четное число то y любое~~

Мы получили 2 ограничения на y

$$y:2 \text{ и } 1 \leq y \leq 43$$

$$\begin{aligned} (x+y)(x+y+1)+y &= x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + y = \\ &= x^2 + 2xy + x + y^2 + 2y = x^2 + x(2y+1) + y^2 + 2y = 2022 \\ \Rightarrow x^2 + x(2y+1) + y^2 + 2y - 2022 &= 0 \end{aligned}$$

$$D = (2y+1)^2 - 4(y^2 + 2y - 2022) = 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y + 8088 = 8089 - 4y$$

т.к. x - натуральное число $\Rightarrow D$ должен быть равен некоторому квадрату.

$$\Rightarrow 8089 - 4y = a^2 \text{ ближайший квадрат это } 89^2 = 7921$$

$$\text{если } 8089 - 4y = 7921 \Rightarrow y = 42 \quad x = 2$$

под условие подходит

если a будет меньше 89 то y будет больше 43 а такого быть не может. $\Rightarrow y$ нас единственный ответ это $x=2, y=42$

Ответ: $x=2; y=42$

Задача N4.

Читовик
Числовик

Будем называть башенкой конструкцию из нескольких кубиков стоящих друг на друге (если в конструкции всего 1 кубик и на нем больше ничего не стоит тоже будем называть это башенкой) в. Заметим что каждая башенка на виде сверху будет видна как 1 кубик.

По виду спереди можно понять что у нас есть минимум 3 башенки из 3-х кубиков.

По виду спереди и по виду сбоку можно понять что у нас есть минимум 2 башенки из 2-х кубиков.

По виду сбоку можно понять что у нас есть минимум 2 башенки из 1-го кубика.

2) У нас минимум $3+2+2=7$ башенок.

3) На виде сверху будет минимум 7 кубиков.

Ответ: 7.

Пример:

		3			
1	2				
			3		
				2	1
		3			

вид спереди

если в клетке ничего не стоит значит в этом месте нет башенки. цифрой показано кол-во кубиков в башенке.

На картинке показан вид сверху.

вид сбоку

С той стороны где написано вид спереди, оттуда мы будем смотреть вид спереди. Там где написано вид сбоку, оттуда мы будем смотреть вид сбоку.

Число $\overline{abc}$ можно представить как $100a + 10b + c$

$$\text{тогда } \overline{abc} - \overline{acb} = (100a + 10b + c) - (100c + 10a + b) = 90a + 9b - 99c$$

Задача №5

Чистовик

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

дискриминант равен $a^2 - 4 \cdot 2022 = a^2 - 8088$

Заметим, что если $a \in [1; 89]$ тогда $a^2 < 8088$

т.к. в этом случае максимальное значение $a^2 = 89^2 = 7921 < 8088$

$\Rightarrow$ при $a \in [1; 89]$ корней нет т.к. дискриминант будет меньше 0.

при $a = 0$ $x^2 + 2022 = 0 \Rightarrow x^2 = -2022$ а такого быть не может

т.к. x^2 всегда $\geq 0 \Rightarrow$ при $a = 0$ корней нет.

при $a \in [90; 99]$ всегда будет 2 корня т.к. $a^2 > 8088$

$\Rightarrow$ дискриминант > 0 .

по теореме Виета сумма корней каждого уравнения при $a \in [90; 99]$

будет равна $-a$.

$\Rightarrow$ сумма всех полученных корней равна

$$-90 - 91 - 92 - 93 - \dots - 99 = -945$$

Ответ: -945

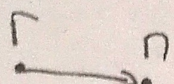
Можно переформулировать условие так, что у нас есть ~~граф~~ ориентированный граф на 100 вершинах, в каждую вершину ведет 40 ребер и из каждой вершины выходит 40 ребер.

Г. П. Г это Галатея - 37
П это Пандора

(Гиперпространственный проток обозначим как ГП.)

У нас есть 3 варианта:

1 вариант

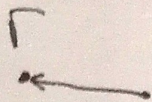


из Галатея - 37 ведет ребро в Пандору.

Тогда с Г можно сразу попасть в П

→ гиперпространственный проток будет 1.

2 вариант



из П ведет ребро в Г.

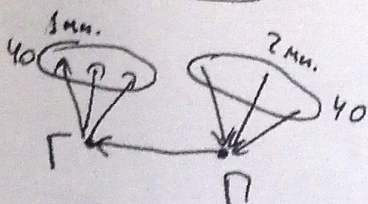
Тогда у нас есть ~~40 вершин~~ множество из 40 вершин в которое ~~ведет~~ идет ребро из Г и есть множество из 40 вершин из которых идет ребро в П.

Заметим что если у нас есть вершина принадлежащая и тому и другому множеству. Тогда наименьшее число ~~ГП~~ будет равно 2 т.к. за один никак нельзя, а за 2 мы из Г ~~сделаем П~~ ^{сделаем П} ~~попадём~~ в вершину которая принадлежит обоим множествам а из этой вершины сделаем ГП в П.

Если нет вершин которая ~~ведет~~ есть в обоих множествах.

18

ГП не входит ни в одно из этих множеств
Тогда кроме Г и П и этих двух множеств у нас есть еще 18 вершин т.к. всего вершин 100.



Дополним что из 1 множества во второе ~~ведет~~ ^{ведет} хотя бы 1 ребро.
Пусть это не так. Тогда из 1 множества ребра могут вести либо в самого себя либо в 18 оставшихся вершин (те которые не Г и П и не 1 и 2 множества). Тогда у нас из каждой вершины этого множества ведет хотя бы 22 ~~вер~~ ребра, при этом 17 в каждую вершину этого множества может входить не более ~~17~~ ¹⁷ ребер из вершин этого множества. Тогда выходящих ребер $\geq 22 \cdot 40$ а входящих $\leq 17 \cdot 40$. Заметим что каждое ребро мы посчитали два раза ~~то~~ ^{то} (ровно по одному разу в выходящих и один раз во входящих)

Можно переформулировать задачу так, что у нас есть граф
обыкновенный... Задача №6

Тогда кол-во выходящих и входящих ребер должно быть одинаково
а это не так. Противоречие.

→ из 1 множества во второе ведет хотя бы 1 ребро.
→ минимальное кол-во $2n$ равно 3 (т.к. за 1 и за 2 нельзя,
а за 3: сначала из 1 множества $2n$ в вершину 1 множества
из которой ведет ребро во 2 множество, затем из этой
вершины делаем $2n$ во 2 множество, а из вершины 2
множества делаем $2n$ в 1)

и во 2 варианте кол-во $2n$ равно либо 2 либо 3.
3 вариант.

Г. и П не соединены ребром этот вариант
малоинтересен 2 варианту

→ кол-во $2n$ 1 3 варианта либо 2 либо 3.

→ Простой может существовать либо 1, либо 2, либо 3

Ответ: 1, 2 или 3.

3 x +

Черновик

Задача

$$abc - acb = 100a + 10b + c - 100a - 10c - b = 9b - 9c = 9(b - c) : 72$$

$$9(b - c) : 72 \quad 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\max(b - c) = 9 \quad b - c = 8 \quad 9, 1; 8, 0$$

$$\min(b - c) = 0 \quad b - c = -8 \quad 1, 9; 0, 8$$

$$a \in [1; 9]$$

$$\begin{array}{r} 2022 \mid 2 \\ 1011 \mid 3 \\ 337 \end{array}$$

$$a > 7$$

$$(x + y)(x + y + 1) + y = 2022$$

$$x, y \in \mathbb{N}$$

$$2022 = 2 \cdot 3$$

$$167 \mid 17$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022 \quad 2y(x + 1) + x(x + 1) = (2y + x)(x + 1) + y^2 = 2022$$

$$I \text{ ap. } v = \frac{10}{a} \quad t = 1g. \quad A = 10 = v \cdot t \cdot a$$

$$II \text{ 7p. } v = \frac{10}{a} \quad t = 0,5g. \quad A = v \cdot t \cdot 7 = \frac{35}{a} \quad a \geq 7$$

$$3 \text{ } a = 35$$

$$v = \frac{2}{7}$$

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2022 \quad \text{нпу } 0 \leq a < 90 \quad \text{нелю корням}$$

$$\text{нпу } a = 0 \quad x_1 = 2022 \quad x_2 = -2022$$

$$8088$$

$$(90 - 1)^2 = 8100 + 1 - 180$$

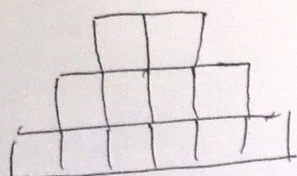
$$a = 90 \quad D = 12$$

$$\frac{-90 - \sqrt{12}}{2}$$

$$\frac{-90 + \sqrt{12}}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -9$$

$$-90 - 91 \dots - 99 = -90 - 190 \cdot 4 - 25 = -90 - 760 - 95 = -760 - 185 = -945$$

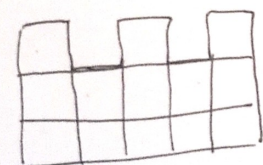


1 2 3

3 2 1

3

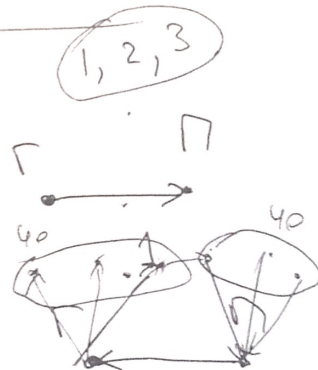
8088



13 15



18



1600



$$18 \cdot 40 \leq 22 \cdot 40$$

Гипотенуза 1433

$10c - b = 9b - 9c = 9(6 - \dots)$

Черновик | Черновик

Задача N4.

Будем называть башенкой конструкцию когда несколько кубиков
стоят друг на друге (если всего 1 кубик и на нем больше никакой
не стоит тоже будем называть это башенкой)

Заметим что каждая башенка будет видна на виде сверху
будет видна как 1 кубик.

По виду сбоку можно понять что у нас есть минимум 6
башенок. $\Rightarrow$ На виде сверху у нас будет минимум 6 кубиков

Ответ: ~~6~~

Пример:

		3			
1	2				
			3		
				2	1
		3			

вид сверху | если в клетке ничего не стоит значит
в этом месте нет башенки
цифры показано кол-во кубиков в башенке.
на картинке показан вид сверху

вид сбоку

$\Rightarrow$ у нас есть 3 башенки

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022 \quad y \div 2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + 2y = 2022$$

$$\text{also } x \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{also } x \equiv 1 \pmod{4}$$

$$(x+2)(x+3) = 2020$$

$$x^2 + 5x - 2014 = 0$$

$$x^2 + (2y+1)x + y^2 + 2y - 2022 = 0$$

$$x+y \geq y+1 \quad x+y+1 \geq y+2$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y + 2 \leq 2022$$

$$\Rightarrow y^2 + 4y - 2020 \leq 0$$

$$16 + 8080 = 8096 \approx 90$$

$$\frac{-4 + 90}{2} \leq 43$$

$$2 \dots 42$$

$$x^2 + 5x - 2014 = 0$$

$$25 + 80656 =$$

$$(2y+1)^2 = 4y^2 + 1 + 8y - 4y^2 - 8y - 8088$$

$$(x+y)(x+y+1)+y =$$

$$= x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + y =$$

$$= x^2 + 2xy + x + y^2 + 2y = x^2 + x(2y+1) + y^2 + 2y = 2022$$

$$D = (2y+1)^2 - 4(y^2 + 2y - 2022) =$$

$$= 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y + 8088 =$$

$$= 8089 - 4y = a^2$$

$$y = 42$$

$$84 - \frac{85189}{2} = 2$$

$$44 \cdot 45 + 42$$

$$\begin{array}{r} \times 45 \\ 46 \\ \hline 270 \\ + 180 \\ \hline 2070 \end{array}$$

$$43244 + 45 \cdot 46 + 44 =$$

$$168 \overline{) 42}$$

$$\begin{array}{r} - 8089 \\ 7921 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 44 \\ 45 \\ \hline 220 \\ + 176 \\ \hline 1980 \end{array}$$