МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**
Профиль олимпиады: **Математика**
ФИО участника олимпиады: **Авдасев Олег Игоревич**
Класс: **10-11**

Технический балл: **95**

Дата проведения: **26 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Авдасев Олег Игоревич

Класс: 10-11

Задача 1	**Задача 2**	**Задача 3**	**Задача 4**	**Задача 5**	**Задача 6**	**Тех. балл***
20 баллов	20 баллов	15 баллов	20 баллов	0 баллов	20 баллов	95 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 20 баллов.
Технический балл равняется сумме баллов за решение задач.
Технический балл участников, набравших в сумме за решение задач 100 и более баллов, полагается равным 100.

Чистовик 1 Вариант 11-1

№1

1 2 3 $\bar{4}$ 5 6 7 $\dot{8}$ $\bar{9}$ 10 11 12 13 14 15 $\bar{16}$ 17 18 19 20 21
22 23 24 $\bar{25}$ 26 $\dot{27}$ 28 29 30 31 32 33 34 35 $\bar{36}$ 37 38 39
40 41 42 43 44 45 46 47 48 $\bar{49}$ 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59
60 61 62 63 $\dot{\bar{64}}$ 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79
80 $\bar{81}$

Для решения задачи я решил рассмотреть ~~за~~ подобную задачу, только с меньшим количеством чисел. Всего в моём примере N чисел и $N = 81$. ~~Все~~ Над всеми квадратами, которые присутствуют в последовательности я поставил черту, всего их $9 = \sqrt{N}$, дальше я посчитал кубы и над ними поставил точку, всего их $4 = \sqrt[3]{N}$ и есть такие числа из которых извлекается как квадратный корень, так и кубический всего их 2 числа $= \sqrt[6]{N}$. Чтобы вычеркнуть из N чисел все квадраты и кубы надо $N - \sqrt{N} - \sqrt[3]{N} + \sqrt[6]{N}$. $N = 2025$.

Итак я вывел формулу для того чтобы убрать все квадраты и кубы из ряда.

~~...~~ Осталось ей воспользоваться ~~...~~

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{N} = 45\\ \sqrt[3]{N} = 12\\ \sqrt[6]{N} = 3\end{array}\right\} \Rightarrow N - 45 - 12 + 3 = N - 54 \Rightarrow$$

=> число стоящее на 2022-м месте будет =

= 2079

Ответ: 2079

№2 Чистовик 2 Вариант 11-1

$$(8x^3+4x^2-18x-9)\cdot \overset{!}{\arccos}(x-1) \leq \arccos\left(\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}\right).$$

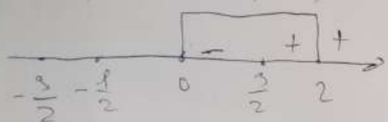
$$\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\cos 50}=\frac{1}{4\cos 40}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin 40}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40\cdot\sin 30+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 30\cdot\cos 40}{2\sin 40\cos 40}=$$

$$=\frac{\cos 10}{\sin 80}=\frac{\cos 10}{\cos 10}=1, \quad \arccos(1)=0$$

Ограничения! $x\in[0;2]$

$$8x^3+4x^2-18x-9 \leq 0$$

$$(2x+1)(2x-3)(2x+3)\leq 0$$



$$x\in\left[0;\tfrac{3}{2}\right]\cup\{2\}$$

Ответ: $x\in\left[0;\tfrac{3}{2}\right]\cup\{2\}$

№3 ~~$a = AB=BC=CD$~~

Из того, что $AB=CD$, и четырёхугольник вписаный => это равнобедренная трапеция.

$a=AB=BC=CD$, $AD=b$ $AC=BD=c$

$h^2=a^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$, $c^2=h^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=a^2+ab$

$c^2=a(a+b)$, $b\leq 3a-1$

~~Подходом подстановки~~

Методом подстановки подбираем корни.

при $a=1$, корней нет, $b=[1;2]$

при $a=2$, корней нет, $b=[1;5]$

при $a=3$, корней нет, $b=[1;8]$

при $a=4$, есть решение. $b=5$, $c=6$

$3a+b=17$ $AB=BC=CD=4$, $AD=5$; $AC=BD=6$

По теореме синусов

$$2R=\frac{BD}{\sin A}=\frac{6\cdot 8}{3\sqrt{7}} \Rightarrow R=\frac{8}{\sqrt{7}}$$

Ответ: $\frac{8}{\sqrt{7}}$

Чистовик 3 Вариант 11-1

№4 $a_{n+1} = (a_n - 1)^3 + 1$

если $a_n = 1 + t$, то $a_{n+1} = 1 + t^2$

$\Downarrow$

$a_2 = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^3, \ldots, a_n = 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}}$

$a_n \le \frac{2022}{2021} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{2021}{2022}\right)^{3^{n-1}} \le 1 + \frac{1}{2021} \Leftrightarrow 3^{n-1} \ge \log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)$

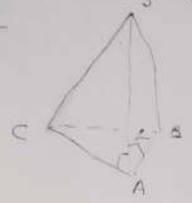
$\Leftrightarrow n \ge 1 + \log_3\left(\log_{\frac{2021}{2022}}\left(\frac{1}{2021}\right)\right) \Rightarrow n \ge 1 + \log_3\left(\log_{\frac{2022}{2021}}(2021)\right)$

Неравенство выполняется

ЧТД

Ответ: да!

№5



$4 = \frac{8}{4} \Rightarrow$

$S = \sqrt{8}$

$V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

$V_{пир} = 2 \cdot \sqrt{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{3}$

$V_{большой} = \left(\frac{2\sqrt{8}}{3} : 8\right) + \frac{2\sqrt{8}}{3} =$

$= \frac{\sqrt{8} + 8\sqrt{8}}{12} = \frac{3\sqrt{8}}{4}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{8}}{4}$

12 Чистовик ... Вариант 11-1

Чистовик 4 Вариант 11-1

№6

$|a|+|b| = \max|a \pm b| = \max\{\pm(a+b) \pm (a-b)\}$,

$\left[\, |x^3+2x^2+x+a| + |x^3-2x^2+x-a| < 4x^2+8x \,\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3+2x < 4x^2+8x \\ -2x^3-2x < 4x^2+8x \\ 4x^2+2a < 4x^2+8x \\ -4x^2-2a < 4x^2+8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)(x+1)<0 \\ x(x^2+2x+5)>0 \\ x > \frac{a}{4} \\ (2x+1)^2+a-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<3 \\ x>\frac{a}{4} \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 > \frac{1-a}{4} \end{cases}$

1) Если $a>1$, то $1-a<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{4} = 2 \Leftrightarrow a = 8 \; (>1)$

2) Если $a \le 1$, то $\frac{a}{4} \le 2 \Rightarrow$

$\sqrt{1-\frac{a}{4}} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow a = -24 \; (\le 1)$

Ответ: $a = -24$