



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Проников Артём Викторович**

Класс: **9**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Проников Артём Викторович

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

$\overline{abc} - \overline{acb}$, заменим десятичной дробью:

$$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c - a \cdot 100 - c \cdot 10 - b = 9b - 9c = 9(b-c), \text{ надо найти все числа, такие } 9(b-c) : 72,$$

$$\begin{cases} 9(b-c) : 9 - \text{верно} \\ 9(b-c) : 8 \Rightarrow \end{cases}$$

$b-c : 8$, т.е. надо найти все числа, такие $b-c : 8$,

$b \equiv c \pmod{8}$, рассмотрим все значения b , такие c по модулю

8 было равно b :

$$b=0; c=0/8$$

$$b=5; c=5$$

$$b=1; c=1/9$$

$$b=6; c=6$$

$$b=2; c=2$$

$$b=7; c=7$$

$$b=3; c=3$$

$$b=8; c=0/8$$

$$b=4; c=4$$

$$b=9; c=1/9$$

Таким образом, существует 19 пар чисел b и c , такие что совпадают по модулю 8, и больше быть не может, т.к. b и c - цифры

Для каждой пары b и c существует 9 значений a , от которого не зависит делимость, но всего вариантов $19 \cdot 9 = 98$

Ответ: 98 чисел

N 3

$$(x+y)(x+y+1)+y=2022$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + y - 2022 = 0$$

$$x^2 + x(2y+1) + y^2 + 2y - 2022 = 0 \quad \text{— квадратное уравнение для } x$$

$$D = 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y + 8088 = 8089 - 4y, \quad \text{дискриминант должен быть}$$

полным квадратом, иначе x не будет натуральным, т.е. $8089 - 4y = a^2$

$$x = \frac{-2y-1 \pm a}{2}, \quad \text{т.к. } x \in \mathbb{N}, \quad \text{то } x > 0, \quad \text{т.е. } \frac{-2y-1 \pm a}{2} > 0 \quad -2y-1 \pm a > 0$$

Очевидно, что случай $-a$ не рассматривается, т.к. все при a положительном. По $-2y-1+a > 0 \quad a > 2y+1$ — возведём в квадрат (обе части натуральные)

$$a^2 > 4y^2 + 4y + 1, \quad \text{подставим значение } a^2:$$

$$8089 - 4y > 4y^2 + 4y + 1 \quad 4y^2 + 8y - 8088 < 0 \quad y^2 + 2y - 2022 < 0$$

$$f(y) = y^2 + 2y - 2022, \quad f(y) < 0 \quad a > 0, \quad \text{вернём в формулу } D = 4 + 8088 = 8092$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{8092}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2023}}{2} = -1 \pm \sqrt{2023}$$

т.к. $-1 - \sqrt{2023} < 0$, то единственное условие на

$$y: y < -1 + \sqrt{2023}, \quad \text{отсюда: } y < -1 + \sqrt{2025} = -1 + 45 = 44$$

$y < 44$ вернёмся к изначальной уравнению $8089 - 4y = a^2$, оценим сверху a :

$$8089 - 4y, \quad \text{max при } y=1 \Rightarrow 8085$$

$$\text{минимум при } y=43 \Rightarrow 7917$$

$7917 \leq a^2 \leq 8085$, то есть нужно найти все квадраты в этом промежутке

найдём квадрат $89^2 = 7921$

$$8089 - 4y = 7921 \quad 4y = 8089 - 7921 \quad y = 42$$

$$x = \frac{-2y-1+a}{2} \quad x = \frac{-89-1+89}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

т.е. одна пара $x=2 \quad y=42$

Ответ: $x=2, y=42$

Поскольку ширина проема ^{сверху} 5, а ширина 6, то мы имеем дело с землем размером 5 на 6, т.е. его можно изобразить таблицей 5x6 с обозначениями, сколько кубиков стоит в каждой клетке поля. Кто-то кубиков будет называть уровнем башни из кубиков. По этим аббревиатурам видно три трехуровневые башни и две двухуровневые, а сверху по две трех-, двух- и одноуровневые башни. Но все эти башни расположены где угодно, и видны с обеих сторон. Таким образом, если башня одного уровня видна с одной-то стороны, то она будет видна и с другой стороны. Таким образом башни определенного уровня можно поставить так, чтобы с проема были определенного уровня. Очевидно, что у одной башни по одной проекции на две стороны. Нам нужно получить сверху 2 проекции 2-ур. Башни, а сверху тоже 2 2-ур. Башни. Так, можно, используя две башни получить 4 пустые проекции. Следовательно достаточно 3 башни по 3 кубика и 2 башни по 1 кубик, чтобы загрузить соответствующие проекции. Непустые проекции можно закрыть башнями уровня не меньше данной. Так, должно быть не менее $2+3+2=7$ башен вообще. Это очевидно.

Пример изобразим таблицей:

1						1
2						2
3						3
3						3
2						2
1						1
3	2	3	2	3		

Очевидно, что убрать башни нельзя, иначе будет недостаточность проекций с какой-либо стороны.

По таблице видно, что условие выполняется, а сверху видно столько кубиков, сколько башен, т.е. 7

Ответ: 7

NS

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$D = a^2 - 8088$, т.к. корни обязаны быть действительными, то $D \geq 0$

$a^2 - 8088 \geq 0$ $a^2 \geq 8088$, т.к. $a \in \mathbb{Z}$, то это квадрат больше 8088.
Первый такой $a = 90$

$$a \geq 90 \Rightarrow a \geq 90 \text{ и } 90 \leq a \leq 99$$

теперь применим теорему Виета к уравнению:

$$x_1 + x_2 = -a$$

Чтобы найти сумму всех полученных действительных корней, сложим эти равенства:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{20} = -a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{10} = -90 - 91 - 92 - \dots - 99 = -90 \cdot 10 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 = -900 - 45 = -945$$

Ответ: сумма действительных корней уравнений -945

N6

Чтобы показывать примеры, будем рисовать направленные графы, чтобы самая левая вершина была начальной платой, а самая правая - конечной. Требуется, что есть случаи, когда за 1 шаг можно перейти из конечной платы (читаем, что платы разные)

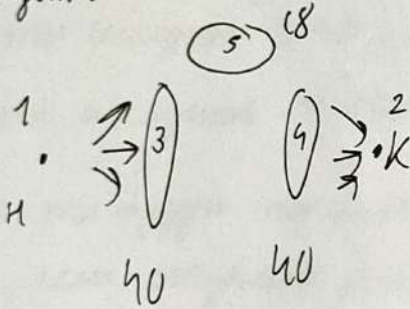
 38 групп плат.

Итак, $H \rightarrow K$ неверно, ~~если~~ какие связи вне этих двух плат, может случить есть

Теперь скажем, что есть 5 групп плат:

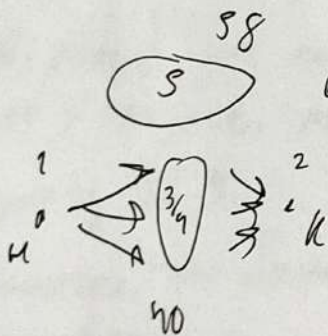
- 1) начальная (1 шт.)
- 2) конечная (1 шт.)
- 3) во что входят ребра начальной (40 шт.)
- 4) из чего входят ребра в конечную (40 шт.)
- 5) остальные (18 шт.)

Подразумевать это можно так:



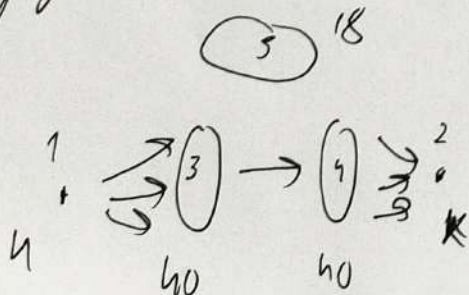
Первый случай, когда любая плата из группы N3 и N4 является одной и той же, тогда кол-во шагов 2, меньше быть не может, т.к. нет прямого пути в конечную из начальной

Кр:



отсюда не, неверно, что траектория все, уменьшится кол-во шагов это не может.

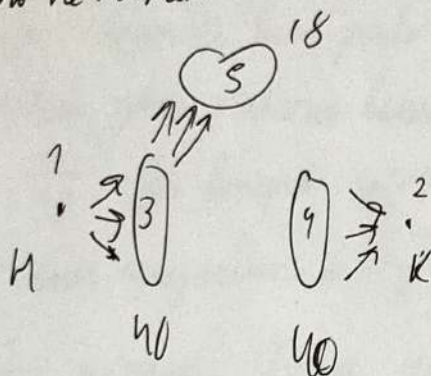
Если же нет ребер плат в группах N3 и N4, ~~то~~ есть портал, из группы N3 в N4, то кол-во шагов = 3



меньше быть не может, т.к. первый шаг всегда идет в группу 3, второй из группы N4, и пути нет, тогда переместиться между N3 и N4, как минимум 1 шаг, минимум

Докжем, что 4 ^{иногда} быть не может

III путь также возможен. Тогда представим, только если между N3 и N4 не будет связи, входящей в N4. Значит все исходящие порты из группы 3 должны пойти в эту группу, иначе и быть не может.



По этой картинке понятно, что из каждой вершины в группе N3 должно исходить в другие группы не более 18 портов, а т.к. из каждой планеты исходит по 40 портов, то внутри группы N3 из каждой вершины исходит не менее 22 портов. (18 портов вне, т.к. если больше, то будут порты либо в N4, либо в K)

Тогда, если отдельно рассмотрим группу N3, то в ней будет потребоваться $22 \cdot 40 = 880$, т.е. не менее 880 (для каждой планеты есть 22 потреб. портов), а полный граф на 10 вершинах содержит $39 \cdot 20 = 780$ портов, а $880 > 780$, т.е. такого случая быть не может и есть противоречие из 3б 4

Аналогично, что больше 4 ^{иногда} быть не может. Ведь где-то противоречивое есть порты из N3 в N4.

Ответ: 1, 2, 3

	x гр./ч	t ч	S гр
первый день	x гр	$\frac{10}{x}$ гр	10
второй день	7 гр	$\frac{5}{x}$ гр	$\frac{35}{x}$

Пусть всего работником было x чел., а скорость работы каждого - y гр./ч.

Тогда скорость всех рабочих в первый день xy гр./ч, а во второй $7y$ гр./ч.

В первый день рабочие выполнили 10 грозок, поэтому время, потраченное на $\frac{10}{xy}$ ч. Во второй день они работали в два раза меньше, так что они поработали $\frac{5}{xy}$ ч. Поэтому во второй день они выполнили

$\frac{35}{x}$ грозок. Так как кол-во грозок - целое число, то $x \in \{1, 5, 7, 35\}$

т.к. $x > 7$, т.к. есть кто-то заболел, поэтому $x = 35$. Значит всего грозок было выполнено $10 + \frac{35}{35} = 11$ грозок

Ответ: 11 грозок.

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7521 \\ \hline 568 \\ 81 \\ \hline 8100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 168 \\ 92 \\ \hline 8089 \\ -176 \\ \hline 7913 \end{array}$$

	28	t	5
64	22	2	10
7521	22	2	10
8089	22	2	10

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7521 \\ \hline 568 \end{array}$$

$$(x+y)(x+y+1) = 2022$$

$$x^2 + xy + x + xy + y^2 + y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + x + y^2 + 2y - 2022 = 0$$

$$x^2 + x(2y+1) + y^2 + 2y - 2022 = 0$$

$$D = 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y + 8088 = 8089 - 4y = a^2$$

$$x = \frac{-2y-1 \pm a}{2}$$

$$x = \frac{-85 \pm 89}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a > 2y+1$$

$$a^2 > 4y^2 + 4y + 1$$

$$8089 - 4y > 4y^2 + 4y + 1$$

$$\begin{array}{r} -74 \\ 176 \\ \hline 102 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7521 \\ \hline 568 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2022 \\ -1980 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ -12 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$8089 - 4y = 7911 \quad 4y = 8089 - 7911 = 178$$

28	t	5
2	2	10
2	2	10
2	2	10

$$\begin{array}{r} -44 \\ -45 \\ \hline -89 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

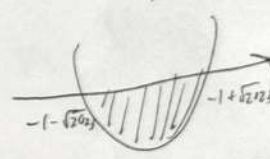
$$\begin{array}{r} 8089 \\ -7917 \\ \hline 172 \end{array}$$

a	a^2
0	0
1	1
2	4
3	9

$$y^2 + 2y - 2022 < 0$$

$$D = 4 + 8088 = 8092$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{8092}}{2} = -1 \pm \sqrt{2023}$$



$$18 \times 9 = 81 \cdot 2 = 162$$

$$14 \times 9 = 126$$

$$y = -1 + \sqrt{2023}$$

$$= -1 + \sqrt{2025}$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

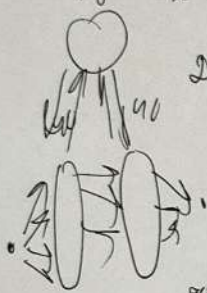
$$-1 + 45 = 44$$

$$-1 + 45 = 44$$

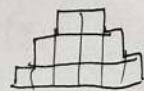
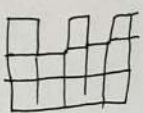
18

$a^2 78088$

at least 6 $\Rightarrow 10$



27,90



90 50 99

no m. Buena:

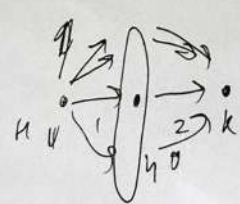
$$x_1 + x_2 = -a$$

$$\sum_x = -\sum_a =$$

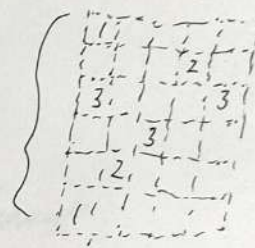
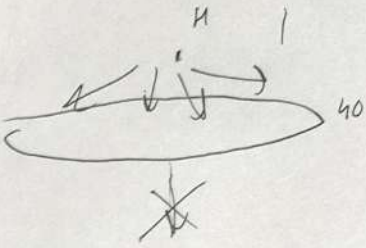
$$= -90 - 91 - 92 \dots =$$

$$= -90.10 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 78 -$$

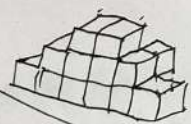
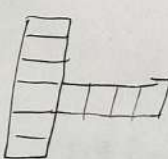
$$-900 - 45 = \textcircled{-945}$$



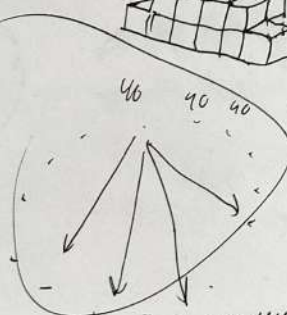
$$\begin{array}{r} 81 \\ 89 \\ \hline 81 \\ 72 \\ 72 \\ 64 \\ \hline 7921 \end{array}$$



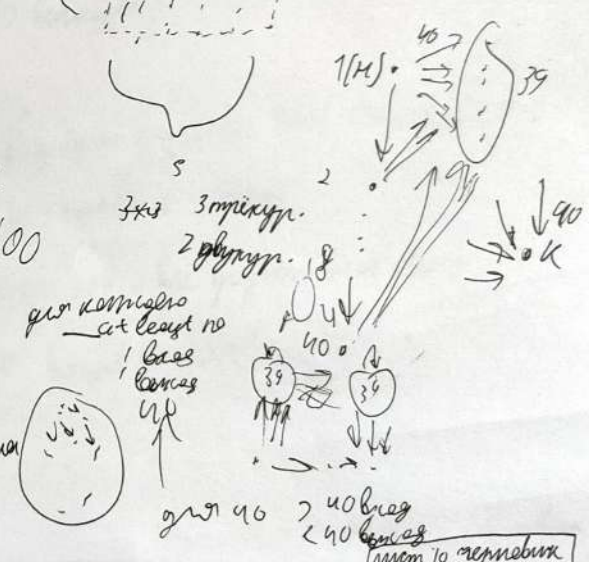
2 трыкыр
2 дзыкыр.
2 (дзыкыр.



46 90 40 100



1 ребро $\Rightarrow$ 2 тригона





10

$$\begin{array}{r} x \\ 7y \end{array} \begin{array}{r} t \\ \frac{10}{xy} \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 10 \\ \frac{35}{x} \end{array}$$

x77

800 багд 800 багд

40



$20 \cdot 39 = 780$ - бүхний бүхний багд + багд MAX

$40 \cdot 40 = 1600$ - голмн багд + багд

$1600 - 780 = 820$ - бүх бүхний багд + багд min

410 багд 410 багд

мөн 11, үргэлжлэх