



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА**

ОЛИМПИАДНАЯ РАБОТА

Наименование олимпиады школьников: **«Покори Воробьёвы горы!»**

Профиль олимпиады: **Математика**

ФИО участника олимпиады: **Кочелов Степан Георгиевич**

Класс: **9**

Технический балл: **100**

Дата проведения: **27 марта 2022 года**

Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике
2021/2022 учебный год
Заключительный этап

ФИО участника: Кочелов Степан Георгиевич

Класс: 9

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5	Задача 6	Тех. балл*
15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	15 баллов	100 баллов

*Верное решение каждой задачи оценивалось в 15 баллов.
Технический балл получался прибавлением 10 к сумме баллов за решение задач.

№1. Условие

Пусть x рабочих, тогда в день один рабочий выполняет ~~10~~ $\frac{10}{x}$ прогон.

Тогда во второй день (т.е. понедельнику) выполнили $\frac{10}{x} \cdot \frac{1}{2} \text{ нед.} \cdot 7 = \frac{35}{x}$ прогон, значит всего прогон

было $10 + \frac{35}{x}$. т.к. кол-во прогон должно быть целым

$35 : x$, $x = 1$, но тогда ~~каждый~~ COVID-19 заболело - в среднем ~~каждый~~ по заболели ~~каждый~~, ≥ 1 заболели

$x = 5$, Аналогично не подходит

$x = 7$, аналогично

$x = 35$, можно быть, тогда прогон 11

Ответ: 11 прогон

№2

~~И~~ $\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$$\overline{acb} = 100a + 10c + b$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 10b + c - 10c + b = 9(b - c) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b - c = 8 & \text{таких только 2: } (8, 0) \text{ и } (1, 9) \\ b - c = 0 & b = c, \text{ таких 10: } (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (9, 9) \\ b - c = -8 & \text{таких только 2: } (0, 8) \text{ и } (1, 9) \end{cases}$$

~~Итак~~ всего вариантов выбора b и c 14, из каждого из них 9 вариантов выбора a (от 1 до 9)

$$14 \cdot 9 = 90 + 4 \cdot 9 = 90 + 36 = 126$$

Ответ: 126

№3

Числовик

$$(x+y) \cdot (x+y+1) + y = 2022$$

$$y^2 + 2(x+y)y + x^2 + x - 2022 = 0$$

$$D_1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - x + 2022 = x + 2023$$

$$y = -x - 1 \pm \sqrt{x + 2023} \Rightarrow x + 2023 - \text{полный квадрат.}$$

т.к. $750^2 < x+2023 < 751^2$
отсюда $x+2023 = 750^2 + 1$
или $x+2023 = 751^2 - 1$

$$x+y \leq 45, \text{ т.к. } 45^2 = 2025, \text{ и если } x+y \geq 45, \text{ то}$$

$$\text{т.к. } x + 2023 - \text{полный квадрат, то } (x+y) \cdot (x+y+1) + y \text{ не может}$$

$$x=2 \text{ получается, тогда } y = -2 - 1 + 45 =$$

$$45 - 46 + 1 = 45 - 45 + 45 + 1 = 2025 + 45 + 1 = 2071, \text{ что больше } 2022.$$

$$(2; 42) - \text{первая пара.}$$

Следующий полный квадрат это

$$46^2 = 45^2 + 2 \cdot 45 + 1 = 2025 + 91 \Rightarrow x = 93,$$

то $x+y < 45$, и оба натуральных $\Rightarrow$ больше пар нет, т.к. дальше x только растет.

$$\text{Ответ: } (2; 42)$$

№4.

Ответ: 7.

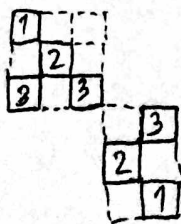
Решение:

В виде 1×1 мы видим 2 столба высотой 2 и 2 столба высотой 3

В виде 1×2 мы видим 2 столба высотой 2 и 3 столба высотой 3 $\Rightarrow$ всего 7 миним. 2 столба высотой 2

и 3 столба высотой 3 $\Rightarrow$ всего миним. 7 кубиков изображено в виде сверху.

Пример:



← вид сверху

↑
вид спереди

цифры обозначают высоту столба

2 и 3

15 Числовик

$$x^2 + ax + 2022 = 0$$

$$D = a^2 - 8088. \Rightarrow \text{пока } a^2 < 8088 \text{ корней нет.}$$

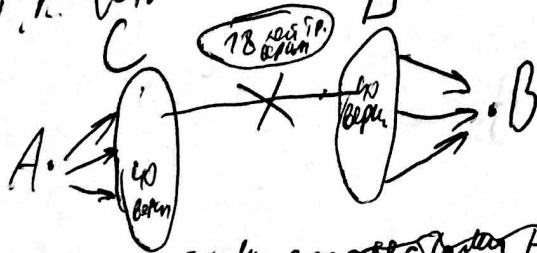
$a^2 \geq 8088$ если $a \geq 90 \Rightarrow$ действительные корни будут при a от 90 до 99. при $a = 90$ $D = 12$, 2 корня; аналитично, т.к. D растёт быстрее a при a от 91 до 99 $D > 0$, $\sqrt{D} \Rightarrow$

будет 2 корня
Сумма корней $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow$ сумма всех действительных корней это
 $-(90 + \dots + 99) = -\frac{(90+99) \cdot 10}{2} = -189.5 \approx -945$

Ответ: -945

16

Едину может потребоваться 1, 2 или 3 прыжка. Галагед - 37 - А
Почему 4 не может. Пандора - В
Пусть за 3 прыжка добрался кольца.
Тогда рассмотрим множество вершин, в которые можно добраться из А в один ход прыжка, а из которых можно добраться в В в один прыжок. Они не пересекаются, т.к. иначе было бы возможно добраться в В за 2 хода.



~~можно 2 хода~~ ~~множество вершин~~ ~~на 1 прыжок~~ ~~из множества~~
С в множество D , т.к. тогда можно добраться за 3 прыжка.
Тогда все исходящие ребра ведут либо внутри множества S , либо в 18 нейтральных вершин. $\Rightarrow$ Визуализировать подграф
из вершин множества S и входящих степеней минимум 22.
Тогда входящая степень максимум 18. Тогда кол-во
исходящих ребер ≥ 880 , а входящих ≤ 720 , но это не возможно.
противоречие. $\Rightarrow$ из множества S есть ребра в множество $D \Rightarrow$
за 3 хода добраться всегда можно

3 из 3

Черновцы

~2

$$\begin{array}{r} \overline{abc} \\ - \overline{qcb} \end{array}$$

$$\overline{abc} = 100 - 9 + 106 + C$$

$$\overline{96} = 700a + 10c + b$$

$$\overline{abc} - \overline{acb} = 1064c - 10c\cancel{4}b = \overline{bc} - \overline{cb}$$

72 двучленна, $\Rightarrow 0, 72$

29

Анатолий
Игоревич

Второй день $\frac{10}{x} \cdot \frac{17}{2} =$
 $= \frac{35}{x}$

[Handwritten signature]

$$\overline{6C} = \overline{C6}$$

$$C = 6$$

$C = 6$
 01011001, 6, 01011001,
 0.70

$$\overline{6C} - \overline{C6} = 72$$

$$10(6-c) + (6-c) = 9(6-c) = 72 \Rightarrow$$

$$b - c - 8, \sqrt{b} = 8, c = 0,$$

$$b=9, c=1$$

26p, 6=9, 96p4

12

$$90 + 18 = 708$$

$\sqrt{1}$	$\checkmark$
$\sqrt{2}$	$\checkmark$
$\sqrt{3}$	$\checkmark$
$\sqrt{4}$	$\checkmark$
$\sqrt{5}$	$\checkmark$
$\sqrt{6}$	

26

1699

Ny

10/2/9

$$\frac{10}{x^2} \cdot \frac{2}{g} \cdot \frac{1}{2} g \cdot 72 = \frac{22}{x} \cdot \frac{2}{10x}$$

$$1024 \cdot \frac{35}{x} = \frac{10x+35}{x} \cdot 2 - \text{работа}$$

$35 : x$, $x = 1$, что нет, 400 во второй день было 4 раза

$x = 5$, не, танже

$x=7$ к-го задано

$\lambda = 35$, тогда все нормально.

7484

репробук

$$\begin{array}{r|l} 2022 & 2 \\ 1011 & 337 \cdot 3 \\ 337 & 337 \\ 7 & \end{array}$$

$$2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$$

$$(x+y)^2 + x+y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 2022$$

$$x^2 + (2y+1)x + y^2 + y = 2022$$

$$D = (2y+1)^2 - 4y^2 - 8y =$$

$$= 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 - 8y =$$

$$= 1 - 4y$$

$$\begin{array}{r|l} 1011 & 3 \\ 19 & 337 \\ 11 & 337 \\ 9 & \\ 21 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 7 \\ 19 & \\ 949 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 337 & 19 \\ 19 & 7 \\ 949 & \end{array}$$

$$(x+y)(x+y+1) = 2022$$

$$x^2 + 2xy + x + y^2 + y = 2022$$

$$x^2 + 2xy + x + y(y+2) = 2022$$

$$x^2 + (2y+1)x + y(y+2) = 2022$$

$$y^2 + 2yx + 2y + x^2 + x = 2022$$

$$y^2 + (2x+2)y + x^2 + x = 2022$$

$$D_1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - x = x + 1$$

~~19, 21, 9, 11~~

$$\Rightarrow x^2 + (2y+1)x + y(y+2) - 2022 = 0$$

$$D = 1 - 4y + 8088$$

$$\Rightarrow y^2 + 2(x+1)y + x^2 + x - 2022 = 0$$

$$D_1 = x + 1 + 2022 = x + 2023$$

$$y_{1,2} = \frac{-x-1 \pm \sqrt{x+2023}}{1}$$

$x + 2023$ - должно быть квадрат

2 ч 4

перепроверь
 $45^2 \rightarrow 43 \cdot 47 = 2021$

$$(45-2)(45+2) = 45^2 - 4$$

$$45^2 = 2025, \quad X=2, \quad Y = -2+1+45 = 44$$

$$46^2$$

$$(42+2)(42+2+1)+42$$

$$44 \cdot 45 + 42$$

$$X+Y < 45$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \times 45 \\ \hline 220 \\ 1760 \\ \hline 1980 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1980 \\ + 42 \\ \hline 2022 \end{array}$$

$$46^2 = (45+1)^2 = 2025 + 90 + 1 = 2025 + 91 \Rightarrow X=93,$$

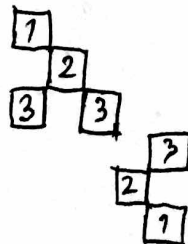
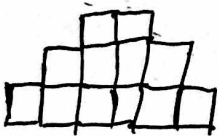
$$(2, 42) \text{ всё!}$$

$$Y = -93 - 1 + 46 \text{ соч.}$$

нат.

№ 7.

у нас получилось 2 башни 1
 2 башни 2
 3 башни 3



3 из 4

NS Упробук

$$x^2 + 9x + 2022 = 0$$

$$D = 81 - 8088$$

$a^2 \geq 90$, иначе $D < 0$, корней нет

$a^2 - 8088$ - точный квадрат

$a = 90$, $a^2 = 8100$, 12 - нет

$$x_1 + x_2 = -9, -(90 + \dots + 99)$$

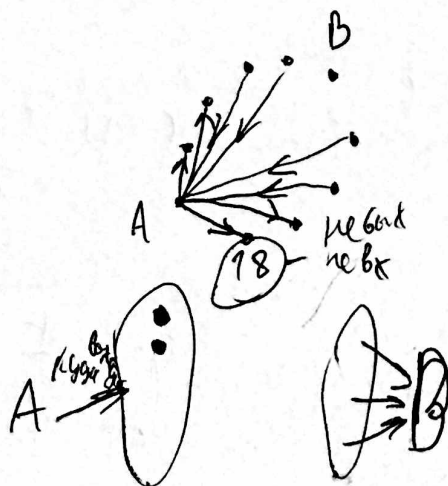
$$\begin{array}{r} \times 189. \\ 5 \\ 945 \end{array}$$

№6

можно решить, только 1

можно решить, только 2

можно решить, только 3



$$A \rightleftharpoons C \rightleftharpoons D$$

$$39 + 18 = 57$$

22 прогнание

22 учхоз.



$$\begin{array}{r} 3 \\ 18 \\ \times 460 \\ 720 \end{array}$$

422.4